

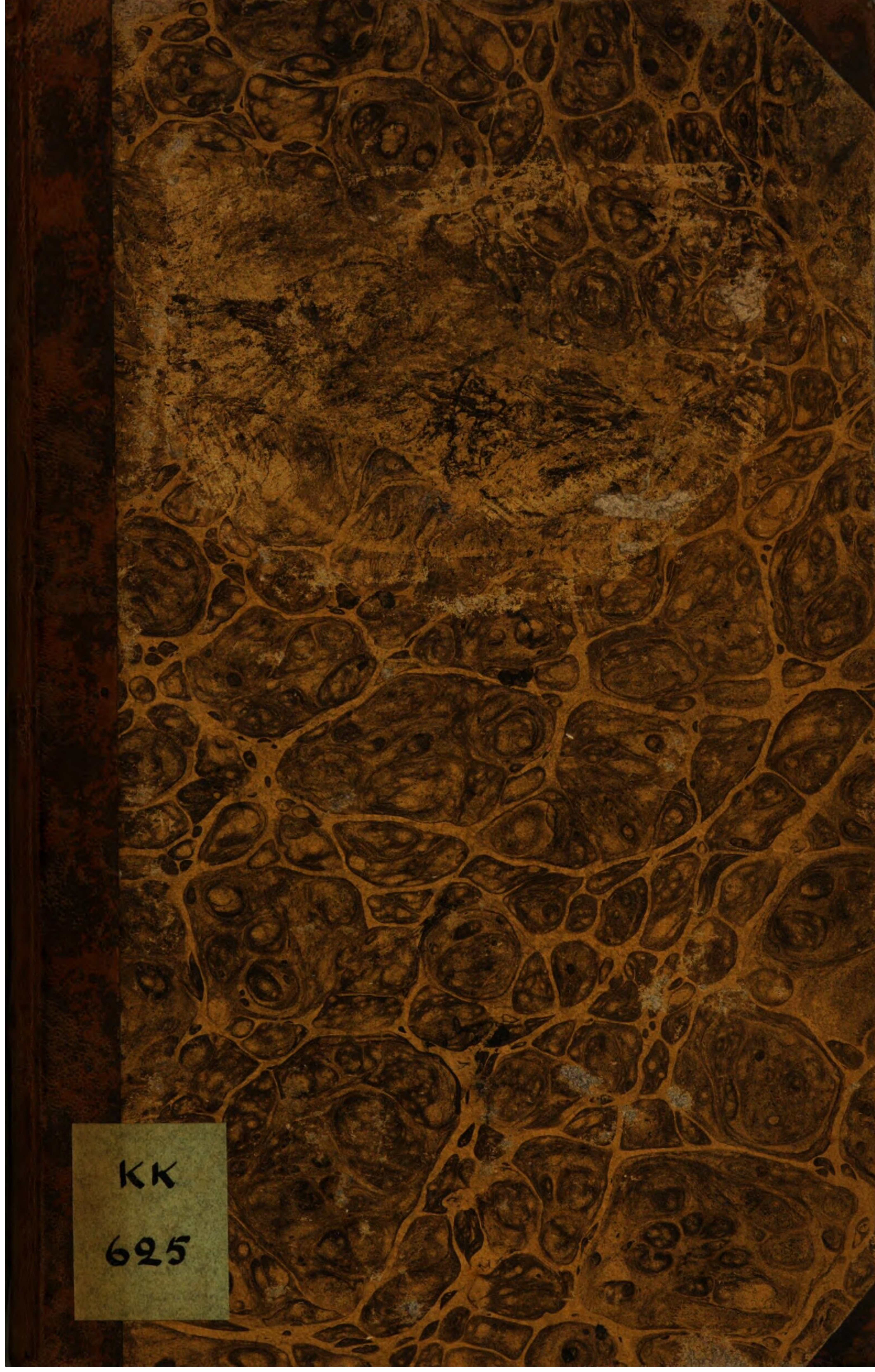
Unruh, Raimund

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie nebst e. Anhang
trigonometrischer Aufgaben ; vorzügl. zum Gebrauche f. Schulen

München 1826

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- K-K 625

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11255217-6

The image shows the front cover of an old book. The cover is decorated with a marbled paper pattern in shades of brown, tan, and black, featuring a complex, organic, cell-like design. A dark brown, textured spine is visible on the left side. In the bottom-left corner, there is a small, rectangular, light green paper label with black text.

KK

625

KK 625

Spring 1822 - w.

David Anton Prachtel
noted on 2 September 1825.

Leubsech

LEHRBUCH
DER
EBENEN UND SPHAERISCHEN
TRIGONOMETRIE

NEBST
EINEM ANHANGE
TRIGONOMETRISCHER AUFGABEN.

VORZÜGLICH
ZUM GEBRAUCHE FÜR SCHULEN.

VON
RAIMUND UNRUH,
Doctor der Philosophie und königlich-baierischer wirklicher
Professor der Mathematik am königlichen Cadetten-Corps
zu München.

Mit einer Steindruck-Tafel.

MÜNCHEN 1826.
IN COMMISSION BEY E. A. FLEISCHMANN.
(GEDRUCHT MIT LENTNERSCHEN SCHRIFTEN.)

LEHRBUCH

DER

DEUTSCHEN SPRACHLEHRE

FÜR DEN GYMNASIAL-UND
HÖHEREN SCHULBESUCH

VON

JOHANN MEYER

PROFESSOR DER DEUTSCHEN SPRACHE
AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

LEHRPLAN

FÜR DEN GYMNASIAL-UND
HÖHEREN SCHULBESUCH

VON

JOHANN MEYER

PROFESSOR DER DEUTSCHEN SPRACHE
AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH
ZÜRICH, VERLAG VON F. O. SCHÖNBERGER, 1871.

LEHRPLAN

FÜR DEN GYMNASIAL-UND
HÖHEREN SCHULBESUCH

VON JOHANN MEYER

PROFESSOR DER DEUTSCHEN SPRACHE
AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

SEINER HOCHWOHLGEBOREN
DEM
KÖNIGLICH BAIERISCHEN HERRN
GENERAL-MAJOR
UND
COMMANDANTEN DES KÖN. BAIER.
CADETTEN-CORPS
GEORG VON TAUSCH,

Ritter des königlichen Civil-Verdienst-Ordens
der baier. Krone etc. etc.

mit innigster Verehrung
und ausgezeichnete Hochachtung

gewidmet

von dem Verfasser.

SEINER HOCHWÜRDIGKEIT

DEM

KÖNIGLICH BAYERISCHEN KRIEGS

GENERAL-MAJOR

UND

COMMANDEUR DER K. B. DIVISION

IN MÜNCHEN

GEHÖRT

SEINER HOCHWÜRDIGKEIT

V o r w o r t.

Meinem Versprechen gemäß und aufgemuntert durch die vielseitig vortheilhafte Würdigung meines Lehrbuches der Geometrie etc. etc. folgt hier das der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

Dasselbe besteht aus drey Abtheilungen, nämlich aus der ebenen dann sphärischen Trigonometrie und aus einem Anhang von Aufgaben über ebene und sphärische Trigono-

metrie, welcher letztere jedoch nichts weniger als eine practische Geometrie seyn soll.

Die rücksichtlich der Geometrie vorkommenden Citaten beziehen sich auf das oben erwähnte Lehrbuch der Geometrie.

Der Verfasser.

I n h a l t.

I.

E b e n e T r i g o n o m e t r i e.

- I. Abschnitt. Erklärung der trigonometrischen Linien, Seite 1. §. 1.
- II. Abschnitt. Von den negativen Winkeln und
ihren trigonometrischen Linien . . . „ 9. §. 12.
- III. Abschnitt. Analytische Bestimmung der trigono-
metrischen Linien.
- A. Einfache Haupt-Formeln . . . „ 11. §. 13.
- B. Zusammengesetzte und abgeleitete trigono-
metrische Formeln . . . „ 14. §. 19.
- IV. Abschnitt.
- A. Von den trigonometrischen Tabellen über-
haupt . . . „ 20. §. 27.
- B. Erklärung der Vlacq'schen trigonometrischen
Tabellen . . . „ 23. §. 29.
- V. Abschnitt. Berechnung der Dreyecke.
- A. Berechnung der Seiten und Winkel . . „ 33. §. 37.
- B. Berechnung der Dreyecks - Flächen . . „ 51. §. 50.
- VI. Abschnitt. Abgeleitete trigonometrische Aufgaben. „ 52. §. 53.

II.

Sphärische Trigonometrie.

- I. Abschnitt. Erklärung der sphärischen Winkel
und Dreyecke . . . „ 56. §. 59.
- II. Abschnitt. Haupt-Eigenschaften der sphärischen
Dreyecke . . . „ 57. §. 62.

VIII

III. Abschnitt. Berechnung der Dreyecke.

A. Berechnung der Seiten und Winkel .	Seite 65. §. 69.
a) Rechtwinklig-sphärische Dreyecke .	„ 65. §. 70.
b) Schiefwinklig-sphärische Dreyecke .	„ 68. §. 77.
B. Berechnung des Flächen-Inhaltes sphärischer Dreyecke	„ 75. §. 83.

IV. Abschnitt. Reduction sphärischer Dreyecke auf die dazu gehörigen Sehnen-Dreyecke

Formel - Tabelle für rechtwinklig - sphärische Dreyecke	„ 83.
Formel - Tabelle für schiefwinklig - sphärische Dreyecke	„ 84.

Trigonometrische Aufgaben.

Allgemeine Vorbegriffe	„ 85. §. 91.
I. Aufgaben über ebene	} Trigonometrie. . „ 88. §. 93.
II. Aufgaben über sphärische	
	„ 101. §. 107.

I.

E b e n e

T r i g o n o m e t r i e.

I. Abschnitt.

Erklärung der trigonometrischen Linien.

§. 1.

Erklärung. Ausser den in der Geometrie vorkommenden Linien enthält die Trigonometrie noch folgende: 1) den *Sinus*, 2) den *Cosinus*, 3) den *Sinus versus* oder *Quersinus*, 4) den *Cosinus versus* oder *Quercosinus*, 5) die *Tangente*, 6) die *Cotangente*, 7) die *Secante* und 8) die *Cosecante*.

§. 2.

I. S i n u s.

Erklärung. (*Fig. 1.*) Wenn man aus dem Scheitel eines Winkels $ABC = \alpha$ die beyden Schenkel durch einen beliebigen Radius in C und A schneidet, und vom Durchschnits-Puncte C des einen Schenkels auf den anderen AB eine Senkrechte CD fällt, so ist diese der *Sinus* des Winkels α oder des Bogens AC, d. i. $CD = \sin. \alpha = \sin. \text{arc. AC.}$

I. Zusatz. Obiger Definition gemäß its, wenn man die Winkel in den verschiedenen Quadranten betrachtet, d. i. wenn AB unverrückt bleibt, BC aber sich immer mehr von AB entfernt, und wenn man auf die Lage des *Sinus* in Be-

zug auf seinen *positiven* oder *negativen* Werth stets Rücksicht nimmt (Geom. Aufg. §. 1. S. 131.):

$\sin. 0^\circ = 0, \sin. ABC = CD, \sin. ABE = BE$ oder

$\sin. 90^\circ = r, \sin. ABF = FG, \sin. ABH$ oder

$\sin. 180^\circ = 0, \sin. [\text{erh.} ABJ] = -JK, \sin. [\text{erh.} ABL] = -BL$ oder

$\sin. 270^\circ = -r, \sin. [\text{erh.} ABM] = -MN$ und

$\sin. 360^\circ = 0.$

Der Radius r , als Sinus von 90° , heist auch *Sinus totus*.

II. Zusatz. Es ist also der Sinus der Winkel im ersten und zweyten Quadranten $+$, der im dritten und vierten aber $-$ (Zus. I.).

III. Zusatz. (Fig. 2.) Der Sinus AD eines spitzen Winkels ABC oder seines Bogens AC ist der halben Sehne AE des doppelten Bogens gleich, d. i. $\sin. \alpha = \frac{1}{2} \text{ Sehne } (2\alpha)$. Denn, verlängert man AD bis E, und zieht man BE, so ist $AD = \frac{1}{2} AE$ und $ABC = \frac{1}{2} ABE$ (Geom. §. 30. Zus. IV.), also auch der Bogen $AC = \frac{1}{2} ACE$ (Geom. §. 57. Zus. IV.), mithin $\sin. \alpha = \frac{1}{2} \text{ Sehne } [2\alpha]$. *)

IV. Zusatz. Zwey Nebenwinkel (Supplements-Winkel) haben gleiche Sinus. (Geom. §. 27. Zus. II.)

V. Zusatz. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke die Hypotenuse als Radius betrachtet, so erscheint jede der Catheten als Sinus des ihr gegenüber stehenden Winkels; denn beschreibt man (Fig. 3.) mit der Hypotenuse AB aus B und A die Kreisbögen AD und BE, so ist $AC = \sin. \alpha$ und $BC = \sin. \beta$. (Erklär.)

VI. Zusatz. Der Sinus von 30° | so wie von 150° ist dem halben Radius gleich, denn es ist

$$\sin. 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ Sehne } 60^\circ \quad (\text{Zus. III.})$$

$$= \frac{1}{2} r \quad (\text{Geom. §. 65.}) = \sin. 150^\circ. \quad (\text{Zus. IV.})$$

*) Da sonst die Sehne *inscripta*, also ihre Hälfte *semis inscripta* hiefs, so mag aus der Abbreviatur *s. ins.* der sonderbare Name *Sinus* entstanden seyn.

§. 3.

II. C o s i n u s.

Erklärung. (Fig. 1.) Der *Cosinus* eines Winkels oder Bogens ist der *Sinus* seines Complementes (Geom. §. 10. a.); d. h., wenn $\beta = \text{Compl. } \alpha$ ist, so ist $\text{CO} = \sin. \beta = \cos. \alpha = \cos. \text{arc. AC}$. Fällt man für α den *Sinus* CD, so ist $\text{CO} = \text{BD}$ (Geom. §. 42.), also auch $\text{BD} = \cos. \alpha$, d. h. der *Cosinus* ist der Theil des Radius, vom Scheitel bis an den Punct, wo der *Sinus* auf dem Radius senkrecht steht.

I. Zusatz. Dieser letzteren Definition zu Folge ist, wenn man, wie den *Sinus* §. 2. Zus. I., den *Cosinus* für die Winkel in den verschiedenen Quadranten mit Rücksicht auf seine Lage betrachtet:

$\cos. 0^\circ = r [= \text{BA}]$, $\cos. \text{ABC} = \text{BD}$, $\cos. \text{ABE}$ oder $\cos. 90^\circ = 0$, $\cos. \text{ABF} = -\text{BG}$, $\cos. \text{ABH} = -\text{BH}$ oder $\cos. 180^\circ = -r$, $\cos. [\text{erhab. ABJ}] = -\text{BK}$, $\cos. [\text{erh. ABL}]$ oder $\cos. 270^\circ = 0$, $\cos. [\text{erh. ABM}] = \text{BN}$ und $\cos. 360^\circ = r$, $[= \text{BA}]$.

II. Zusatz. Der *Cosinus* ist für Winkel im ersten und vierten Quadranten $+$, für die im zweyten und dritten aber $-$ (Zus. I.).

III. Zusatz. Nebenwinkel (oder Supplements-Winkel) haben gleich große aber entgegengesetzte *Cosinus*, wovon der des stumpfen Winkels negativ ist.

IV. Zusatz. Der *Sinus* und *Cosinus* von 45° sind gleich. (Erkl.) Der $\cos. 30^\circ = \sin. 60^\circ = \frac{r}{2}\sqrt{3}$; denn, ist (Fig. 3.) $\alpha = 30^\circ$, dann $\text{AC} = \sin. 30^\circ$, $\text{BC} = \cos. 30^\circ$ und $\text{AB} = r$, so ist (Geom. §. 80. Zus. III.) $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 - \text{AC}^2$ oder $\cos^2 30^\circ = r^2 - \sin^2 30^\circ = r^2 - [\frac{r}{2}]^2$ [§. 2. Zus. VI.], also $\cos. 30^\circ = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3} = \sin. 60^\circ$.

V. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist, wenn man die Hypotenuse als Radius betrachtet, jede Cathete *Cosinus* des ihr anliegenden spitzen Winkels; denn

*) $\cos.^2 \alpha$ heisst der $\cos. \alpha$ ist zu quadriren, hingegen bedeutet $\cos. [\alpha]^2$ den *Cosinus* des quadrierten Winkels α .

beschreibt man (Fig. 3.) die Bogen AD und BE, so ist offenbar $BC = \cos. \alpha$ und $AC = \cos. \beta$. (Erkl.)

§. 4.

III. Sinus versus (Quersinus).

Erklärung. (Fig. 1.) Sinus versus heißt jener Theil des Radius oder Diameters vom Anfangs-Puncte des Bogens A bis zu jenem Puncte, wo der Sinus auf dem Radius oder Diameter senkrecht steht. Ist nämlich $CD = \sin. \alpha$, so ist $AD = \sin. \text{vers. } \alpha = \sin. v. \text{ arc. } AC$.

I. Zusatz. Diesem nach ergibt sich:

$\sin. \text{vers. } 0^\circ = 0, \sin. \text{vers. } ABC = AD, \sin. \text{vers. } ABE = AB$ oder
 $\sin. \text{vers. } 90^\circ = r, \sin. \text{vers. } ABF = AG, \sin. \text{vers. } ABH = AH$ oder
 $\sin. \text{vers. } 180^\circ = 2r = d, \sin. v. [\text{erh. } ABJ] = AK, \sin. v. [\text{erh. } ABL]$
 $= AB$ oder

$\sin. \text{vers. } 270^\circ = r, \sin. \text{vers. } [\text{erh. } ABM] = AN$ und
 $\sin. \text{vers. } 360^\circ = 0$.

II. Zusatz. Der Sinus versus ist für alle Winkel in den verschiedenen Quadranten +. (Zus. I.)

§. 5.

IV. Cosinus versus (Quercosinus).

Erklärung. (Fig. 1.) Der Sinus versus des Complementes eines Winkels heißt sein Cosinus versus. Ist nämlich $\beta = \text{Compl. } \alpha$, so ist $EO = \sin. \text{vers. } \beta = \cos. \text{vers. } \alpha = \cos. v. \text{ arc. } AC$.

I. Zusatz. Diesem zu Folge ist:

$\cos. v. 0^\circ = r [= EB], \cos. v. ABC = EO, \cos. v. ABE$ oder
 $\cos. v. 90^\circ = 0, \cos. v. ABF = EP, \cos. v. ABH = EB$ oder
 $\cos. v. 180^\circ = r, \cos. v. [\text{erh. } ABJ] = EQ, \cos. v. [\text{erh. } ABL] = EL$ od.
 $\cos. v. 270^\circ = 2r = d, \cos. v. [\text{erh. } ABM] = ER$ und
 $\cos. v. 360^\circ = r$.

II. Zus. Auch der Cosinus versus ist stets +. (Zus. I.)

§. 6.

V. Tangente.

Erklärung. (Fig. 1.) Beschreibt man aus dem Scheitel eines Winkels $ABC = \alpha$ einen Kreisbogen, errichtet man

dann im Durchschnitts-Puncte A des einen Schenkels auf diesem eine Senkrechte und verlängert diese bis an den gehörig verlängerten andern Schenkel; so heisst diese Senkrechte AS die *Tangente* des Winkels α oder des Bogen AC; also $AS = \text{tang. } \alpha = \text{tang. arc. AC}$.

I. Zusatz. Dieser Definition gemäß ist:

$\text{tang. } 0^\circ = 0$, $\text{tang. ABC} = AS$, tang. ABE oder $\text{tang. } 90^\circ = \infty$, $\text{tang. ABF} = -AT$ [g. Aufg. §. 1.], tang. ABH oder $\text{tang. } 180^\circ = 0$, $\text{tang. [erh. ABJ]} = AU$, tang. [erh. ABL] oder $\text{tang. } 270^\circ = -\infty$, $\text{tang. [erh. AEM]} = -AV$ und $\text{tang. } 360^\circ = 0$.

II. Zusatz. Die Tangente ist für Winkel im ersten und dritten Quadranten $+$, für jene im zweyten und vierten aber $-$ (Zus. I.).

III. Zusatz. Nebenwinkel haben gleich grosse aber entgegengesetzte Tangenten, wovon die des stumpfen Winkels negativ ist. (Zus. I.)

IV. Zusatz. Die Tangente von 45° ist dem Radius gleich; denn (Fig. 4.) ist $\alpha = 45^\circ$, so ist auch $BCA = 45^\circ$, also $AC = AB = r$, folglich $\text{tang. } 45^\circ = AC = r$.

§. 7.

VI. C o t a n g e n t e.

Erklärung. Die Tangente des Complementes eines Winkels heisst seine *Cotangente*. (Fig. 1.) Ist also $\beta = \text{Compl. } \alpha$, so ist $EW = \text{tang. } \beta = \text{cotang. } \alpha = \text{cot. arc. AC}$.

I. Zusatz. Daher ist:

$\text{cot. } 0^\circ = \infty$, $\text{cot. ABC} = EW$, cot. ABE oder $\text{cot. } 90^\circ = 0$, $\text{cot. ABF} = -EX$, cot. ABH oder $\text{cot. } 180^\circ = -\infty$, $\text{cot. [erh. ABJ]} = EY$, cot. [erh. ABL] oder $\text{cot. } 270^\circ = 0$, $\text{cot. [erh. AEM]} = -EZ$ und $\text{cot. } 360^\circ = \infty$.

II. Zusatz. Die Cotangente ist, wie die Tangente, für die Winkel im ersten und dritten Quadranten $+$, für die im zweyten und vierten aber $-$ (Zus. I.).

III. Zusatz. Nebenwinkel haben gleich groſſe, aber entgegengesetzte Cotangenten, wovon die des stumpfen Winkels negativ ist. (Zus. I.)

IV. Zusatz. Die Cotangente von 45° ist dem Radius gleich; denn es ist $\cot. 45^\circ = \tan. 45^\circ = r$. (Erkl. und §. 6. Zus. IV.)

V. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist jede Cathete die Tangente des ihr gegenüberliegenden oder die Cotangente des ihr anliegenden spitzen Winkels, wenn man die andere Cathete als Radius betrachtet. Denn beschreibt man (Fig. 3.) im rechtwinkligen Dreyecke ABC aus B und A die Bogen FC und GC, so ist $AC = \tan. \alpha$ (§. 6.) $= \cot. \beta$. (Erkl.) und eben so $BC = \tan. \beta = \cot. \alpha$.

§. 8.

VII. S e c a n t e.

Erklärung. (Fig. 1.) Wenn AS die Tangente des Winkels α ist, so heisst der Schenkel BS dieses Winkels, vom Scheitel bis an den Durchschnits-Punct der Tangente, die Secante des Winkels α ; also $BS = \sec. \alpha = \sec. \text{arc. } AC$.

Die Secante ist positiv, sobald sie so, wie für Winkel im ersten Quadranten, nämlich mit dem Schenkel des Winkels zusammen fällt. Muſs aber der Schenkel des Winkels über seinen Scheitel d. i. nach der entgegengesetzten Richtung verlängert werden, so hat die Secante eine der vorigen entgegengesetzte Lage und ist also negativ.

I. Zusatz. Diesem zu Folge ist:

$\sec. 0^\circ = r$, $\sec. ABC = BS$, $\sec. ABE$ oder
 $\sec. 90^\circ = \infty$, $\sec. ABF = -BT$ [g. A. §. 1.], $\sec. ABH$ oder
 $\sec. 180^\circ = -r$, $\sec. [\text{erh. } ABJ] = -BU$, $\sec. [\text{erh. } ABL]$ oder
 $\sec. 270^\circ = \infty$, $\sec. [\text{erh. } ABM] = BV$ und
 $\sec. 360^\circ = r$.

II. Zusatz. Die Secante ist für Winkel im ersten und vierten Quadranten +, für jene im zweyten und dritten aber — (Zus. I.),

III. Zusatz. Nebenwinkel haben gleich groſſe, aber entgegengesetzte, Secanten, wovon die des stumpfen Winkels negativ ist. (Zus. I.)

§. 9.

VIII. Cosecante.

Erklärung. Die Cosecante eines Winkels ist die Secante seines Complementes; d. i. (*Fig. 1.*) wenn $\beta = \text{Compl. } \alpha$ ist, so ist $BV = \sec. \beta = \text{cosec. } \alpha = \text{cosec. arc. AC.}$

I. Zusatz. Diesem nach ist:

$\text{cosec. } 0^\circ = \infty$, $\text{cosec. ABC} = BV$, cosec. ABE oder $\text{cosec. } 90^\circ = r$, $\text{cosec. ABF} = BX$, cosec. ABH oder $\text{cosec. } 180^\circ = \infty$, $\text{cosec. [erh. ABJ]} = -BY$, cosec. [erh. ABL] od. $\text{cosec. } 270^\circ = -r$, $\text{cosec. [erh. ABM]} = -BZ$ und $\text{cosec. } 360^\circ = \infty$.

II. Zusatz. Die Cosecante ist für Winkel im ersten und zweyten Quadranten $+$, für die im dritten und vierten aber $-$ (Zus. I.).

III. Zusatz. Nebenwinkel haben gleich groſſe positive Cosecanten. (Zus. I.)

IV. Zusatz. $\sec. 45^\circ = \text{cosec. } 45^\circ = r\sqrt{2}$; denn ist in *Fig. 4.* $\text{AEC} = 45^\circ$, so ist $AB = AC$ und $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2r^2$, also $BC = r\sqrt{2} = \sec. 45^\circ = \text{cosec. } 45^\circ$.

§. 10.

Lehrsatz. Gleichnahmige trigonometrische Linien desselben Winkels verhalten sich zu einander wie die Radien der Kreise, von welchen der Winkel als Central-Winkel betrachtet wird.

Beweis. (*Fig. 5.*) Es sey, für den Radius AM , $AB = \sin. \alpha$, $MB = \cos. \alpha$, $BD = \sin. \text{vers. } \alpha$, $CD = \text{tang. } \alpha$, und $MC = \sec. \alpha$, so wie, für den Radius aM , $ab = \sin. \alpha$, $Mb = \cos. \alpha$, $bd = \sin. \text{vers. } \alpha$, $cd = \text{tang. } \alpha$ und $Mc = \sec. \alpha$.

Da $ab \nmid cd \nmid AB \nmid CD$ ist, so folgt:

1) $aM : ab = AM : AB$.

2) $aM : Mb = AM : MB$.

3) $aM : aM - Mb = AM : AM - MB$, oder

$aM : Md - Mb = AM : MD - MB$, d. i.

$aM : bd = AM : BD$.

$$4) Md: cd = MD: CD.$$

$$5) Md: Mc = MD: MC.$$

Auf dieselbe Art wird der Beweis für den *cos. vers. α*, für die *cotang. α* und *cosec. α* geführt, nachdem man diese Linien construirt hat.

Zusatz. Das Verhältniß der trigonometrischen Linien zweyer Winkel für den Radius R [oder *sin. tot. = R*] ist immer gleich dem Verhältnisse der gleichnamigen trigonom. Linien derselben Winkel für den Radius r [oder *sin. tot. = r*]. Denn, bedeutet *sin.* den Sinus für den Radius R und *Sin.* jenen für den Radius r, so ist

$$\begin{array}{l} \sin. A: \text{Sin. } A = R: r \\ \sin. B: \text{Sin. } B = R: r \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{[Lehrsatz.]} \\ \text{folglich} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sin. A: \text{Sin. } A = \sin. B: \text{Sin. } B \text{ oder} \\ \sin. A: \sin. B = \text{Sin. } A: \text{Sin. } B. \end{array}$$

Dasselbe gilt auch für alle übrigen trigonom. Linien.

§. 11.

Erklärung. Die Wissenschaft, die Verhältnisse der trigonometrischen Linien für jeden Bogen oder Winkel zu finden, und vermittelst derselben aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, worunter wenigstens Eine Seite seyn muß, die übrigen drey durch Rechnung zu finden, heißt ebene Trigonometrie.

Unter den drey gegebenen Stücken muß stets wenigstens Eine Seite seyn, weil sonst das Dreyeck wohl der Form nicht aber der Gröfse nach bestimmt wäre. (Geom. §. 75. und 76. dann §. 18. Zus. I. §. 20. Zus. I. §. 30. Z. I. und §. 31.)

II. Abschnitt.

Von den negativen Winkeln und ihren trigonometrischen Linien.

§. 12.

Erklärung. 1) Nimmt man in *Fig. 1.* an, daß A der Anfangs-Punct oder Null-Punct eines Bogens oder Winkels sey, und daß dieser Bogen oder Winkel in der Richtung von A bis C, E, F, H, J, L oder M zunehme; so heißen alle diese Bogen oder Winkel nach dieser Richtung für einen bestimmten Fall *positiv*, und es erscheint ABE als der erste, EBH als der zweyte, HBL als der dritte und LBA als der vierte Quadrant für solche Winkel. Bildet sich hingegen ein Bogen oder Winkel von demselben Anfangs-Puncte A, in der entgegengesetzten Richtung, nach M, L, J, H, F, E oder C; so ist jeder dieser Bogen oder Winkel, in Beziehung auf obige *negativ* und es erscheint ABL als der erste, LBH als der zweyte, HBE als der dritte und EBA als der vierte Quadrant für negative Bogen oder Winkel. Es ist demnach der erste, zweyte, dritte und vierte Quadrant für negative Winkel nichts anders als der vierte, dritte, zweyte und erste Quadrant für positive.

2) Betrachtet man AB als unbeweglich und rückt man BC gegen E, F, H, J, L, M und A, so erscheinen die verschiedenen positiven Winkel in den vier Quadranten und zuletzt ein Winkel von vier rechten. Nimmt dieser Winkel noch mehr zu, d. i. wird er größer als vier rechte und fällt BC, durch die fortgesetzte Fortrückung in eben erwähnter Richtung, wieder neuerdings in BC, BF, BH, JB etc. etc.; so entstehen Winkel in dem fünften, sechsten, siebenten etc. etc. Quadranten. Es ist an sich klar, daß alle trigonometrischen Linien für Winkel im fünften, sechsten, siebenten und achten Quadranten ganz so sind, wie jene im ersten, zweyten, dritten, vierten etc. Läßt man hingegen BC sich dem unbeweglichen Schenkel AB nähern, so wird der Winkel immer kleiner und endlich $= 0$, wenn BC auf

AB fällt. Bewegt sich BC über AB abwärts und fällt es z. B. mit BM zusammen, so heißt dieser Winkel ABM in Bezug auf die oben erwähnten negativ. Rückt man BC über M nach L, J, H, F, E, C und A, so nimmt der negative Winkel immer mehr zu und wird endlich $= 360^\circ$. Wird dieser Winkel noch größer, d. i. kommt der bewegliche Schenkel in dieser Richtung zum zweyten Mahle auf BM, BL, BJ, BH, BF etc.; so entstehen negative Winkel im fünften, sechsten, siebenten und achten Quadranten. Auch für diese vier Quadranten sind die trigonometrischen Linien so wie die im ersten, zweyten, dritten und vierten u. s. w.

I. Zusatz. Alle trigonometrischen Linien für negative Winkel im ersten, zweyten, dritten und vierten Quadranten sind ganz dieselben, wie jene für positive Winkel im vierten, dritten, zweyten und ersten (Erkl. 1. und §. 2 bis 9). Ebendaher sind auch die trigonometrischen Linien für negative Winkel im fünften, sechsten, siebenten, achten etc., wie die für positive Winkel im vierten, dritten, zweyten und ersten Quadranten. (Erkl. 2.) u. s. w.

Folgende Tabelle gewährt eine genaue Uebersicht aller trigonometrischen Linien und ihrer Werthe in allen Quadranten für positive und negative Winkel, als kurze Zusammenstellung alles Bisherigen.

Für posit. Winkel	0°	90°	180°	270°	360°	I II III IV
						Quadrant
<i>Sinus</i>	0	r	0	—r	0	++ --
<i>Cosinus</i>	r	0	—r	0	r	+ --++
<i>Sinus versus</i>	0	r	2r	r	0	++++
<i>Cosinus versus</i>	r	0	r	2r	r	++++
<i>Tangente</i>	0	∞	0	— ∞	0	+ --+--
<i>Cotangente</i>	∞	0	— ∞	0	∞	+ --+--
<i>Secante</i>	r	∞	—r	∞	r	+ --+--
<i>Cosecante</i>	∞	r	∞	—r	∞	++++
Für negat. Winkel	360°	270°	180°	90°	0°	IV III II I
						Quadrant

II. Zusatz. Aus dem Bisherigen ergibt sich, wenn α einen spitzen Winkel, π einen Winkel oder Bogen von 180° und n jede beliebige positive ganze Zahl oder 0 bedeutet, folgende allgemeine Zusammenstellung.

1) Der Sinus ist positiv im 1. 2. 5. 6. 9. 10. } Quadr.
 „ „ „ negativ im 3. 4. 7. 8. 11. 12. }
 daher

$$+\sin. \alpha = \sin. [\pi - \alpha] = \sin. [3\pi - \alpha] = \sin. [5\pi - \alpha] \dots \\ = \sin. [(2n-1)\pi - \alpha].$$

$$= \sin. [2\pi + \alpha] = \sin. [4\pi + \alpha] = \sin. [6\pi + \alpha] \dots \\ = \sin. [2n\pi + \alpha].$$

$$-\sin. \alpha = \sin. [\pi + \alpha] = \sin. [3\pi + \alpha] = \sin. [5\pi + \alpha] \dots \\ = \sin. [(2n-1)\pi + \alpha].$$

$$= \sin. [2\pi - \alpha] = \sin. [4\pi - \alpha] = \sin. [6\pi - \alpha] \dots \\ = \sin. [2n\pi - \alpha].$$

2) Für den Cosinus ist

$$+\cos. \alpha = \cos. [2\pi + \alpha] = \cos. [4\pi + \alpha] \dots = \cos. [2n\pi + \alpha].$$

$$-\cos. \alpha = \cos. [\pi + \alpha] = \cos. [3\pi + \alpha] \dots = \cos. [(2n-1)\pi + \alpha].$$

3) Für den Sinus versus

$$\sin. vers. \alpha = \sin. v. [2\pi + \alpha] = \sin. v. [4\pi + \alpha] \dots = s. v. [2n\pi + \alpha].$$

$$\sin. v. [\pi - \alpha] = s. v. [3\pi + \alpha] = s. v. [5\pi + \alpha] \dots = s. v. [(2n-1)\pi + \alpha].$$

4) Für die Tangente

$$\pm tg. \alpha = tg. [\pi \pm \alpha] = tg. [2\pi \pm \alpha] = tg. [3\pi \pm \alpha] \dots = tg. [n\pi \pm \alpha].$$

5) Für die Secante

$$+\sec. \alpha = \sec. [2\pi + \alpha] = \sec. [4\pi + \alpha] \dots = \sec. [2n\pi + \alpha].$$

$$-\sec. \alpha = \sec. [\pi + \alpha] = \sec. [3\pi + \alpha] \dots = \sec. [(2n-1)\pi + \alpha].$$

III. Abschnitt.

Analytische Bestimmung der trigonometrischen Linien.

A. Einfache Haupt-Formeln.

§. 13.

Aufgabe. Der Sinus eines Winkels und der Radius ist gegeben, man soll daraus den Cosinus finden.

Auflösung. (Fig. 1.) Im rechtwinkligen Dreyecke BCD ist $BD^2 = BC^2 - DC^2$ (Geom. §. 80. Z. III.), also $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2}$ oder $\cos. \alpha = \sqrt{r^2 - \sin^2. \alpha}$, für $r=1$ $\cos. \alpha = \sqrt{1 - \sin^2. \alpha}$. I.)

§. 14.

Aufgabe. Aus dem Sinus oder Cosinus eines Winkels

- 1) dessen Sinus versus
2) dessen Cosinus versus } zu finden.

Auflösung. Es ist (Fig. 1.) $AD = AB - BD$, also auch $\sin. vers. \alpha = r - \cos. \alpha$ und, für $r=1$, $\sin. v. \alpha = 1 - \cos. \alpha$. II.)

Ferner ist auch $EO = EB - OB = EB - CD$, d. i. $\cos. vers. \alpha = r - \sin. \alpha$ und, für $r=1$, $\cos. v. \alpha = 1 - \sin. \alpha$. III.)

§. 15.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus eines Winkels dessen Tangente zu finden.

Auflösung. (Fig. 1.) Es ist $CD \perp AS$, also

$BD : BA = DC : AS$ (Geom. §. 71. Z. III.) oder $\cos. \alpha : r = \sin. \alpha : \tan. \alpha$, mithin

$$\tan. \alpha = \frac{r. \sin. \alpha}{\cos. \alpha} \text{ und, für } r=1$$

$$\tan. \alpha = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} \quad \text{IV.)}$$

§. 16.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus eines Winkels dessen Cotangente zu finden.

Auflösung. (Fig. 1.) Es ist $\triangle BCD \sim \triangle BEW$, [denn $\alpha = EWB$, und $BDC = BEW = R$], folglich

$CD : BD = BE : EW$, oder

$\sin. \alpha : \cos. \alpha = r : \cot. \alpha$, daher

$$\cot. \alpha = \frac{r. \cos. \alpha}{\sin. \alpha} \text{ und, für } r=1, \cot. \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha} \quad \text{V.)}$$

Zusatz. Es ist $\cot. \alpha = \frac{1}{\tan. \alpha}$ denn $\cot. \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha} = \frac{\cos. \alpha : \cos. \alpha}{\sin. \alpha : \cos. \alpha} = \frac{1}{\tan. \alpha}$ (§. 15. IV.). Eben deswegen ist

$$\text{auch } \tan. \alpha = \frac{1}{\cot. \alpha}$$

§. 17.

Aufgabe. Aus dem Cosinus eines Winkels dessen *Secante* zu finden.

Auflösung. (Fig. 1.) Da $CD \perp AS$ ist, so folgt

$BD : BC = BA : BS$, also auch

$\cos. \alpha : r = r : \sec. \alpha$ und

$$\sec. \alpha = \frac{r^2}{\cos. \alpha}, \text{ für } r=1, \sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha}. \quad \text{VI.)}$$

§. 18.

Aufgabe. Aus dem Sinus eines Winkels dessen *Cosecante* zu entwickeln.

Auflösung. In Fig. 1. ist $\triangle BCD \sim \triangle BEW$, also

$CD : BC = BE : BW$, oder

$\sin. \alpha : r = r : \operatorname{cosec}. \alpha$, woraus

$$\operatorname{cosec}. \alpha = \frac{r^2}{\sin. \alpha} \text{ und, für } r=1, \operatorname{cosec}. \alpha = \frac{1}{\sin. \alpha}. \quad \text{VII.)}$$

1) Anmerkung. Setzt man in jeder dieser Formeln anstatt α die Werthe $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ etc. etc. oder $\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ etc. etc., so ergeben sich, nach gehöriger Substitution, die schon früher durch Construction gefundenen Werthe der trigonometrischen Linien auch aus diesen Formeln. So ist z. B.

$$\cos. 90^\circ = \sqrt{1 - \sin^2. 90^\circ} = \sqrt{1 - 1} = 0, \text{ eben so auch}$$

$$\operatorname{tang}. 270^\circ = \frac{\sin. 270^\circ}{\cos. 270^\circ} = \frac{-1}{0} = -\infty \text{ etc. *)}. \text{ Ferner ist}$$

$$\operatorname{tang}. [\pi - \alpha] = \frac{\sin. [\pi - \alpha]}{\cos. [\pi - \alpha]}, \text{ denn es ist } \operatorname{tang}. [\pi - \alpha] =$$

$$-\operatorname{tang}. \alpha \text{ (§. 12. Z. II.)}, \sin. [\pi - \alpha] = \sin. \alpha \text{ und } \cos. [\pi - \alpha] =$$

$$-\cos. \alpha, \text{ also } -\operatorname{tg}. \alpha = \frac{\sin. \alpha}{-\cos. \alpha} \text{ und } \operatorname{tg}. \alpha = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} \text{ etc.}$$

2) Anmerkung. Aus den eben erwähnten sieben trigonometrischen Formeln ergibt sich, daß durch den Sinus eines Winkels auch zugleich alle übrigen trigonometrischen Linien für diesen Winkel gegeben sind und leicht durch Rechnung gefunden werden können.

*) Der Anfänger wolle ja nicht unterlassen, diese Untersuchung bey den noch übrigen für sich vorzunehmen und sich von dem Einklange zwischen Analytik und Construction zu überzeugen.

B. Zusammengesetzte und abgeleitete trigonometrische Formeln.

§. 19.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus zweyer Winkel

1) den Sinus
2) den Cosinus } ihrer Summe

zu finden.

Auflösung. (Fig. 6.) Wenn $ABC = \alpha$, $ABD = \beta$, dann $AF = \sin. \alpha$, $BF = \cos. \alpha$, $DG = \sin. \beta$ und $BG = \cos. \beta$ ist; so ist $DBC = \alpha + \beta$, dann $DE = \sin. [\alpha + \beta]$ und $BE = \cos. [\alpha + \beta]$.

1) Um $DE = \sin. [\alpha + \beta]$ zu finden, fälle man JG senkrecht auf BC, so wie auch GH auf DE und es ist dann $HE = GJ$ und $\sin. [\alpha + \beta] = DE = HE + DH = GJ + DH$.

Da $GJ \perp AF$ ist, so folgt, daß

$$AB : AF = BG : GJ \text{ oder}$$

$$r : \sin. \alpha = \cos. \beta : GJ, \text{ folglich}$$

$$GJ = \frac{\sin. \alpha. \cos. \beta}{r} \text{ ist.}$$

$\triangle ABF \sim \triangle DHG$ [indem $H = F = 90^\circ$ und $HDG = HGB = \alpha$ ist], also

$$AB : BF = DG : DH \text{ oder}$$

$$r : \cos. \alpha = \sin. \beta : DH, \text{ woraus}$$

$$DH = \frac{\cos. \alpha. \sin. \beta}{r} \text{ ist.}$$

$$\text{Also } \sin. [\alpha + \beta] = GJ + DH$$

$$= \frac{\sin. \alpha. \cos. \beta + \cos. \alpha. \sin. \beta}{r} \text{ u. für } r=1,$$

$$= \sin. \alpha. \cos. \beta. + \cos. \alpha. \sin. \beta. \quad \text{VIII.)}$$

2) Um $BE = \cos. [\alpha + \beta]$ zu finden, betrachte man $\cos. [\alpha + \beta] = BE = BJ - EJ = BJ - GH$.

Es ist $GJ \perp AF$, also

$$AB : BF = BG : BJ, \text{ oder}$$

$$r : \cos. \alpha = \cos. \beta : BJ, \text{ woraus}$$

$$BJ = \frac{\cos. \alpha. \cos. \beta}{r} \text{ ist.}$$

Da $\triangle ABF \sim \triangle DHG$ [1.] ist, so ist auch

$$AB : AF = DG : GH, \text{ oder}$$

$$r : \sin. \alpha = \sin. \beta : GH, \text{ also}$$

$$GH = \frac{\sin. \alpha. \sin. \beta}{r}.$$

$$\text{Daher } \cos. [\alpha + \beta] = BJ - GH$$

$$= \frac{\cos. \alpha. \cos. \beta - \sin. \alpha. \sin. \beta}{r} \text{ u. für } r=1,$$

$$= \cos. \alpha. \cos. \beta - \sin. \alpha. \sin. \beta. \quad \text{IX.)}$$

§. 20.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus zweyer Winkel

- | | |
|----------------|-------------------|
| 1) den Sinus | } ihrer Differenz |
| 2) den Cosinus | |

zu finden.

Auflösung. Man nehme in den beyden Formeln VIII. und IX. (§. 19.) den Winkel β als negativ (§. 12.); so wird nach gehöriger Untersuchung der Werthe des Sinus oder Cosinus dieses negativen Winkels nach §. 12. aus der Formel VIII.

$$\sin. [\alpha - \beta] = \sin. \alpha. \cos. \beta - \cos. \alpha. \sin. \beta. \quad \text{X.)}$$

und aus der Formel IX.

$$\cos. [\alpha - \beta] = \cos. \alpha. \cos. \beta + \sin. \alpha. \sin. \beta. \quad \text{XI.)}$$

Diese beyden Formeln, so wie die folgenden gelten für den Radius oder $\sin. tot. = 1$.

Anmerkung. Die bisher abgehandelten Formeln von I. bis XI. sind die Haupt- und Grund-Formeln, aus welchen alle folgenden abgeleitet werden.

§. 21.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus des einfachen

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| Winkels 1) den Sinus | } des doppelten Winkels |
| 2) den Cosinus | |

zu finden.

Auflösung. Man setze, in den Formeln VIII. und IX. $\beta = \alpha$, so folgt

$$1) \sin. 2\alpha = 2 \sin. \alpha. \cos. \alpha. \quad \text{XII.)}$$

$$2) \cos. 2\alpha = \cos^2. \alpha - \sin^2. \alpha. *) \quad \text{XIII.)}$$

*) Man drücke diese so wie die übrigen trigonometrischen Formeln durch Worte aus.

§. 22.

Aufgabe. Aus dem Cosinus des doppelten Winkels
 1) den Sinus
 2) den Cosinus } des einfachen
 zu entwickeln.

Auflösung. 1) Man substituïre in die Formel XIII. anstatt $\cos^2. \alpha$ seinen Werth aus der Formel I, nämlich

$$\begin{aligned}\cos. 2\alpha &= \cos^2. \alpha - \sin^2. \alpha \\ &= 1 - \sin^2. \alpha - \sin^2. \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2. \alpha, \text{ woraus}\end{aligned}$$

$$\sin. \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos. 2\alpha}{2}} \text{ ist.} \quad \text{XIV.)}$$

2) Man substituïre in XIII. anstatt $\sin^2. \alpha$ seinen Werth aus I, d. i.

$$\begin{aligned}\cos. 2\alpha &= \cos^2. \alpha - \sin^2. \alpha \\ &= \cos^2. \alpha - [1 - \cos^2. \alpha] \\ &= 2\cos^2. \alpha - 1, \text{ also}\end{aligned}$$

$$\cos. \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos. 2\alpha}{2}}. \quad \text{XV.)}$$

Zusatz. Der Analogie nach ist

$$\sin. \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos. \alpha}{2}} \text{ und } \cos. \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos. \alpha}{2}}, \text{ also}$$

auch $1 - \cos. \alpha = 2 \sin^2. \frac{1}{2} \alpha$ und $1 + \cos. \alpha = 2 \cos^2. \frac{1}{2} \alpha$.

§. 23.

Aufgabe. Aus dem Sinus und Cosinus von α und $[\alpha + \beta]$
 1) den Sinus
 2) den Cosinus } von β zu finden.

Auflösung. 1) Man multiplicire VIII. mit $\cos. \alpha$ und IX. mit $\sin. \alpha$ und subtrahire das letztere Product vom ersteren: nämlich

$$\begin{aligned}\cos. \alpha. \sin. [\alpha + \beta] &= \sin. \alpha. \cos. \alpha. \cos. \beta + \cos^2. \alpha. \sin. \beta \\ \underline{- \sin. \alpha. \cos. [\alpha + \beta]} &= \underline{- \sin. \alpha. \cos. \alpha. \cos. \beta + \sin^2. \alpha. \sin. \beta} \\ \cos. \alpha. \sin. [\alpha + \beta] - \sin. \alpha. \cos. [\alpha + \beta] &= [\cos^2. \alpha + \sin^2. \alpha] \sin. \beta \\ &= \sin. \beta. \quad \text{XVI.)}\end{aligned}$$

denn es ist $\cos^2. \alpha + \sin^2. \alpha = r^2 = 1$. (§. 13).

2) Man multiplicire VIII. durch $\sin. \alpha$ und IX. durch $\cos. \alpha$ und addire beyde Producte; nämlich

$$\sin. \alpha. \sin. [\alpha + \beta] = \sin^2. \alpha. \cos. \beta + \sin. \alpha. \cos. \alpha. \sin. \beta$$

$$\cos. \alpha. \cos. [\alpha + \beta] = \cos^2. \alpha. \cos. \beta - \sin. \alpha. \cos. \alpha. \sin. \beta$$

$$\sin. \alpha. \sin. [\alpha + \beta] + \cos. \alpha. \cos. [\alpha + \beta] = [\sin^2. \alpha + \cos^2. \alpha] \cos. \beta = \cos. \beta. \quad \text{XVII.)}$$

denn es ist $\sin^2. \alpha + \cos^2. \alpha = r^2 = 1$. (§. 13).

§. 24.

Aufgabe. Man suche aus den Tangenten zweyer Winkel

1) die Tangente	}	ihrer Summe.
2) die Cotangente		

Auflösung. 1) Es ist bekannt, daß $\text{tang. } \alpha = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \beta}$

(§. 15. IV.) ist, daher auch

$$\text{tang. } [\alpha + \beta] = \frac{\sin. [\alpha + \beta]}{\cos. [\alpha + \beta]} = \frac{\sin. \alpha. \cos. \beta + \cos. \alpha. \sin. \beta}{\cos. \alpha. \cos. \beta - \sin. \alpha. \sin. \beta}$$

(VIII. und IX.); dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos. \alpha. \cos. \beta$, so wird

$$\begin{aligned} \text{tang. } [\alpha + \beta] &= \frac{\sin. \alpha : \cos. \alpha + \sin. \beta : \cos. \beta}{1 - [\sin. \alpha : \cos. \alpha] [\sin. \beta : \cos. \beta]} \\ &= \frac{\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \beta}{1 - \text{tang. } \alpha. \text{tang. } \beta} \quad \text{XVIII.)} \end{aligned}$$

2) Da $\text{cot. } \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$ ist, so ist auch

$$\text{cot. } [\alpha + \beta] = \frac{\cos. [\alpha + \beta]}{\sin. [\alpha + \beta]} = \frac{1 - \text{tang. } \alpha. \text{tang. } \beta}{\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \beta} \quad \text{XIX.)}$$

§. 25.

Aufgabe. Man suche aus den Tangenten zweyer Winkel

1) die Tangente	}	ihrer Differenz.
2) die Cotangente		

Auflösung. Man betrachte in den Formeln XVIII. und XIX. den Winkel β als negativ (§. 12), so wird, nach gehöriger Berücksichtigung des Werthes der Tangente dieses negativen Winkels, aus XVIII.

$$\text{tang. } [\alpha - \beta] = \frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \beta}{1 + \text{tang. } \alpha. \text{tang. } \beta} \quad \text{XX.)}$$

und aus XIX.

$$\text{cotang. } [\alpha - \beta] = \frac{1 + \text{tang. } \alpha. \text{tang. } \beta}{\text{tang. } \alpha. - \text{tang. } \beta} \quad \text{XXI.)}$$

Zusatz. Da $\text{tang. } 45^\circ = r = 1$ ist (§. 6. Zus. IV), so ist $\text{tang. } [45^\circ + \beta] = \frac{1 + \text{tang. } \beta}{1 - \text{tang. } \beta} = \text{cot. } [45^\circ - \beta]$

$$\text{cot. } [45^\circ + \beta] = \frac{1 - \text{tang. } \beta}{1 + \text{tang. } \beta} = \text{tang. } [45^\circ - \beta].$$

Anmerkung. Auf ähnliche Art kann man aus VI. und VII. mit Hülfe der Formeln VIII., IX., X., XI. neue Formeln für $\text{sec. } [\alpha + \beta]$, $\text{cosec. } [\alpha + \beta]$, $\text{sec. } [\alpha - \beta]$ und $\text{cosec. } [\alpha - \beta]$ ableiten.

§. 26.

Man kann durch Zusammenstellung der Formeln VIII., IX., X., XI. etc. etc. noch mehrere Formeln entwickeln; nämlich:

- 1) addirt man VIII. und X., so entsteht
 $\text{sin. } [\alpha + \beta] + \text{sin. } [\alpha - \beta] = 2. \text{sin. } \alpha. \cos. \beta, \text{ XXII.)}$
- 2) Durch die Addition von IX. und XI. ergibt sich
 $\cos. [\alpha + \beta] + \cos. [\alpha - \beta] = 2. \cos. \alpha. \cos. \beta. \text{ XXIII.)}$
- 3) Subtrahirt man X. von VIII., so ist
 $\text{sin. } [\alpha + \beta] - \text{sin. } [\alpha - \beta] = 2. \cos. \alpha. \sin. \beta. \text{ XXIV.)}$
- 4) Aus der Subtraction der Formel IX. von XI. folgt
 $\cos. [\alpha - \beta] - \cos. [\alpha + \beta] = 2. \sin. \alpha. \sin. \beta. \text{ XXV.)}$
- 5) Setzt man $\alpha + \beta = m$, dann $\alpha - \beta = n$, so ist daraus
 $\alpha = \frac{m+n}{2}$ und $\beta = \frac{m-n}{2}$. Substituirt man diese Werthe
in XXII., XXIII., XXIV. und XXV., so ergibt sich

$$\text{sin. } m + \text{sin. } n = 2. \text{sin. } \frac{m+n}{2}. \cos. \frac{m-n}{2}. \text{ XXVI.)}$$

$$\cos. m + \cos. n = 2. \cos. \frac{m+n}{2}. \cos. \frac{m-n}{2}. \text{ XXVII.)}$$

$$\text{sin. } m - \text{sin. } n = 2. \cos. \frac{m+n}{2}. \sin. \frac{m-n}{2}. \text{ XXVIII.)}$$

$$\cos. n - \cos. m = 2. \sin. \frac{m+n}{2}. \sin. \frac{m-n}{2}. \text{ XXIX.)}$$

- 6) Aus XXVI. und XXVIII. folgt

$$\frac{\text{sin. } m + \text{sin. } n}{\text{sin. } m - \text{sin. } n} = \text{tang. } \frac{m+n}{2}. \text{cot. } \frac{m-n}{2}$$

$$= \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}[m+n]}{\text{tang. } \frac{1}{2}[m-n]} \text{ (§. 16. Z.) XXX.)}$$

7) Aus XXVII. und XXIX.

$$\frac{\cos.n - \cos.m}{\cos.n + \cos.m} = \operatorname{tang}.\frac{m+n}{2} \cdot \operatorname{tang}.\frac{m-n}{2}. \text{XXXI.)}$$

8) Aus XXVI. und XXVII.

$$\frac{\sin.m + \sin.n}{\cos.m + \cos.n} = \operatorname{tang}.\frac{m+n}{2}. \text{XXXII.)}$$

9) Aus XXVIII. und XXIX.

$$\frac{\sin.m - \sin.n}{\cos.n - \cos.m} = \operatorname{cot}.\frac{m+n}{2}. \text{XXXIII.)}$$

10) Aus XXVIII. und XXVII.

$$\frac{\sin.m - \sin.n}{\cos.m + \cos.n} = \operatorname{tang}.\frac{m-n}{2}. \text{XXXIV.)}$$

11) Aus XXII. und XXIII.

$$\frac{\sin.[\alpha+\beta] + \sin.[\alpha-\beta]}{\cos.[\alpha+\beta] + \cos.[\alpha-\beta]} = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \operatorname{tang}.\alpha. \text{XXXV.)}$$

12) Aus XXII. und XXV.

$$\frac{\sin.[\alpha+\beta] + \sin.[\alpha-\beta]}{\cos.[\alpha-\beta] - \cos.[\alpha+\beta]} = \frac{\cos.\beta}{\sin.\beta} = \operatorname{cot}.\beta. \text{XXXVI.)}$$

13) Ferner ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}.\alpha \pm \operatorname{tang}.\beta &= \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} \pm \frac{\sin.\beta}{\cos.\beta} \\ &= \frac{\sin.\alpha.\cos.\beta \pm \cos.\alpha.\sin.\beta}{\cos.\alpha.\cos.\beta} \\ &= \frac{\sin.[\alpha \pm \beta]}{\cos.\alpha.\cos.\beta}. \text{XXXVII.)} \end{aligned}$$

14) Eben so $\operatorname{cot}.\beta \pm \operatorname{cot}.\alpha = \frac{\cos.\beta}{\sin.\beta} \pm \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin.\alpha.\cos.\beta \pm \cos.\alpha.\sin.\beta}{\sin.\alpha.\sin.\beta} \\ &= \frac{\sin.[\alpha \pm \beta]}{\sin.\alpha.\sin.\beta}. \text{XXXVIII.)} \end{aligned}$$

15) Aus XXXVII. folgt

$$\frac{\operatorname{tang}.\alpha + \operatorname{tang}.\beta}{\operatorname{tang}.\alpha - \operatorname{tang}.\beta} = \frac{\sin.[\alpha+\beta]}{\sin.[\alpha-\beta]}. \text{XXXIX.)}$$

16) Eben so folgt aus XXXVIII.

$$\frac{\operatorname{cot}.\beta + \operatorname{cot}.\alpha}{\operatorname{cot}.\beta - \operatorname{cot}.\alpha} = \frac{\sin.[\alpha+\beta]}{\sin.[\alpha-\beta]} \text{ u. s. w. } \text{XXXX.)}$$

Anmerkung. Aus diesen Formeln lassen sich noch eine Menge anderer ableiten, welches nun für den Anfänger nicht sehr schwer seyn wird.

IV. Abschnitt.

A. Von den trigonometrischen Tabellen überhaupt.

§. 27.

Aufgabe. Für jeden gegebenen Winkel den Sinus und Cosinus zu berechnen.

Auflösung. 1) Da der äusserst kleine Bogen an seiner Grenze mit seiner Sehne zusammenfällt, so kann der Sinus von einer Secunde dem Bogen einer Secunde gleichgestellt werden, und es ist, für den Radius = 1, die halbe Peripherie = $3,141592653589\dots = \pi$, folglich der Bogen von

einer Secunde oder $\sin. 1'' = \frac{\pi}{180.60.60} = 0,0000048481\dots$

2) Nach den Formeln XII. und XIII., dann VIII. und IX. findet man (nachdem man durch I. den $\cos. 1''$ gefunden hat) den Sinus und Cosinus von $2'', 3'', 4'' \dots 10''$; dann von $20'', 30'' \dots 60''$ oder $1'$; endlich von $2', 3', \dots 60'$ oder 1° , so wie dann für $2^\circ, 3^\circ \dots 45^\circ$, wodurch die Sinus und Cosinus für alle übrigen Winkel schon bekannt sind, indem der Sinus und Cosinus eines Winkels, der gröfser als 45° ist, nichts anders ist, als der schon bekannte Cosinus und Sinus seines Complementes.

3) Da endlich die trig. Linien für stumpfe und erhabene Winkel der Gröfse nach jenen ihrer Supplemente gleichen, so sind durch den Sinus und Cosinus für die Winkel im ersten Quadranten auch jene für alle übrigen Winkel bekannt. Es versteht sich von selbst, dafs der positive oder negative Werth dieser Linien nach dem früher Erklärten aus ihrer Lage entnommen werden müsse.

Zusatz. Hat man den Sinus und Cosinus eines Winkels, so ist dadurch jede andere trigonometrische Linie dieses Winkels bekannt. (§. 18. 2. Anmerk.)

Anmerkung. Diese Aufgabe hat nicht den Zweck, die wirkliche Berechnung der trigonometrischen Linien auf diese Art auf's Neue vorzunehmen (denn alle diese Linien

sind schon in eigenen Tabellen berechnet vorhanden), sondern nur die Möglichkeit solcher Berechnungen und die Methode zu zeigen, welche die Elementar-Mathematik zu diesem Behufe darbiethet. *)

§. 28.

Erklärung. Tabellen, in welchen für jeden Winkel oder Bogen die trigonometrischen Linien für einen bestimmten Radius entweder selbst oder die Logarithmen derselben angegeben sind, heißen trigonometrische Tafeln.

Es finden sich solcher Tafeln mehrere berechnet und wiederholt berichtigt, so daß wir jetzt aller Mühe dieser Art gänzlich überhoben sind.

Die gewöhnlichsten Tabellen sind die von Adrianus Vlacq, dann noch vorzüglicher die von Vega, nämlich die kleineren in einem Bande, die mittleren in zwey Bänden (für die Praxis in den meisten Fällen hinlänglich) und dessen großes kostbares Werk: *Thesaurus logarithmorum completus* in Fol. (mit 10 Decimal-Stellen, zu sehr feinen Rechnungen geeignet). — Auch Schulze's Tabellen verdienen erwähnt zu werden. — Besonders brauchbar und beliebt sind auch die *Tables partatives de Logarithmes*, par Callet, Paris. Diese enthalten die Logarithmen der trigonom. Linien sowohl für die gewöhnliche alte, als auch für die in Frankreich gebräuchliche neuere Centesimal-Eintheilung des Quadranten (Geom. §. 92. b.). Für letztere Eintheilung des Quadranten haben in Frankreich auch Borda und Delambre, dann in Teutschland Hobert und Ideler sehr genaue Tafeln berechnet.

I. Zusatz. In den vorhandenen trigonometrischen Tafeln finden sich gewöhnlich die Logarithmen der trigon. Li-

*) Am schnellsten gelangt man durch die höhere Analysis zu diesem Zwecke. Diese lehrt nach gewissen allgemeinen Formeln den Sinus und Cosinus eines jeden Winkels unmittelbar aus der zugehörigen Bogenlänge zu berechnen. Hierüber Euleri *Introduct. in analys. infin. Tom. I.* Dann Klügel's analytische Trigonometrie, so wie dessen mathem. Wörterbuch unter den Artikeln: *Goniometrie*, *Cyclometrie*, *Cyclotechnie* — vorzüglich kurz und gründlich auch in Pasquich's mathem. Analysis 1. Bd. etc. etc.

nien für den Radius 10000000000 in einigen auch noch die natürlichen Sinus und Cosinus für einen kleineren Radius berechnet.

II. Zusatz. Da die meisten trigonometrischen Formeln für den Radius 1 construirt sind, wird es bey Berechnungen oft nöthig, mit den Logarithmen der trigon. Linien für den Radius 1 zu rechnen. Um einen Logarithmus für den Radius der Tabellen (10000000000) in den für den Radius 1 zu verwandeln, subtrahire man von der Characteristik des ersteren 10; denn bedeutet $\text{Sin. } \alpha$ die trigon. Linie für den Radius der Tabellen, $\sin. \alpha$ die für den Radius 1, so ist nach §. 10.

$$\text{Sin. } \alpha : \sin. \alpha = 10000000000 : 1, \text{ also}$$

$$\sin. \alpha = \frac{\text{Sin. } \alpha}{10000000000} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \log. \sin. \alpha &= \log. \text{Sin. } \alpha - \log. 10000000000 \\ &= \log. \text{Sin. } \alpha - 10. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ist auch $\log. \sin. \alpha + 10 = \log. \text{Sin. } \alpha$, d. h. man verwandelt den $\log.$ Sinus für den Radius 1. in den der Tabellen, deren Radius = 10000000000 ist, wenn man der Characteristik des ersteren 10 addirt.

III. Zusatz. Soll man die natürlichen Sinus oder Cosinus etc. einer Tabelle, worin der Radius R zum Grunde liegt, für einen andern Radius r verwandeln; so darf man bloß den Sinus oder Cosinus der Tabelle mit r multipliciren und durch R dividiren. Denn es ist nach §. 10.

$$\text{Sin. } \alpha : \sin. \alpha = R : r, \text{ also}$$

$$\sin. \alpha = \frac{r. \text{Sin. } \alpha}{R}.$$

Ist $r=1$, so darf man bloß den Sinus oder Cosinus etc. der Tabelle durch ihren Radius R dividiren. — Umgekehrt verwandelt man den Sinus etc. etc. für den Radius 1 in jenen für den Radius der Tabellen, wenn man ihn durch diesen multiplicirt.

B. Erklärung der Vlacq'schen trigonometrischen Tabellen.

§. 29.

Erklärung. 1) Vlacq's erste Tabelle enthält von Minute zu Minute die Sinus, Tangenten und Secanten, so wie die Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Winkel von 0° bis 90° , und zwar so geordnet, daß die Grade von 0 bis 45 auf den linken Seiten von vorne nach rückwärts steigend, jene von 45° bis 90° aber rechts, vom Ende dieser Tabelle nach vorwärts zu wachsend, vorkommen, so daß die Winkel mit den Graden und Minuten links die in derselben horizontalen Linie treffenden Winkel rechts jedes Mal zu 90° ergänzen und umgekehrt.

2) Die zweyte Tabelle dieses Buches enthält die Logarithmen der Sinus und Tangenten für die einzelnen Minuten und Secunden des ersten Grades, d. i. für jene Winkel, welche kleiner sind als ein Grad.

3) Die Logarithmen dieser Tabellen sind für den Radius 10000000000, die natürlichen Sinus, Tangenten und Secanten selbst aber für den Radius 100000 berechnet.

I. Für jeden gegebenen Winkel den Sinus, Cosinus, die Tangente etc., so wie den Logarithmus seines Sinus, Cosinus, seiner Tangente etc. etc. zu finden.

§. 30.

Aufgabe. Man soll für einen Winkel, welcher keine Secunden enthält, z. B. für $15^\circ 28'$, so wie für $86^\circ 45'$ den Sinus und dann den Cosinus aus der Tabelle finden.

Auflösung. 1) Aus der ersten Tabelle ist (der Erklärung §. 29. 1. gemäß) Seite 61.

$$\sin. 15^\circ 28' = 26667,77 \dots$$

so wie Seite 14. $\sin. 86^\circ 45' = 99839,16 \dots$

2) Um den Cosinus von $15^\circ 28'$ zu finden, schlage man $15^\circ 28'$ auf (sie finden sich Seite 61.) und nehme auf dem

anderen Blatte (Seite 62.) die in gerader Linie mit den 28' in der Spalte *Sinus* treffende Zahl (nämlich den *Sinus* seines Complementes $= 74^{\circ} 32'$); d. i. $\cos. 15^{\circ} 28' = 96378,58..$ Auf ähnliche Art findet man $\cos. 86^{\circ} 45' = 5669,28..$

Zusatz. Wie 1) findet man $\tan. 15^{\circ} 28' = 27669,81$, und $\sec. 15^{\circ} 28' = 103757,5$; dann wie 2) $\cot. 15^{\circ} 28' = 361404,69$ und $\operatorname{cosec}. 15^{\circ} 28' = 374934,47$.

§. 31.

Aufgabe. Für einen Winkel, welcher auch Secunden bey sich hat, z. B. für $35^{\circ} 52' 15''$ und für $74^{\circ} 12' 32''$ den *Sinus* und *Cosinus* zu finden.

Auflösung. 1) Betrachtet man die trigon. Linien der Tafeln, so findet man, daß sich die Unterschiede der trigon. Linien sehr wenig verschiedener Winkel verhalten wie die Unterschiede dieser Winkel, d. h. wenn A, B, C sehr wenig verschiedene Winkel bezeichnen, so ist

$$C - A : B - A = \sin. C - \sin. A : \sin. B - \sin. A.$$

Setzt man für diese Aufgabe $A = 35^{\circ} 52'$, $B = 35^{\circ} 52' 15''$ und $C = 35^{\circ} 53'$, so ist nach obiger Proportion

$$1' : 15'' = \sin. 35^{\circ} 53' - \sin. 35^{\circ} 52' : \sin. 35^{\circ} 52' 15'' - \sin. 35^{\circ} 52'$$

od. $60'' : 15'' = 23,57 : \sin. 35^{\circ} 52' 15'' - 58590,1$, woraus

$$\sin. 35^{\circ} 52' 15'' - 58590,1 = \frac{15 \cdot 23,57}{60} = 5,89, \text{ also}$$

$$\sin. 35^{\circ} 52' 15'' = 58590,1 + 5,89 = 58595,99.$$

Hieraus ergibt sich folgende practische Regel:

„Man suche in der Tabelle den *Sinus* des gegebenen Winkels aber mit Hinweglassung der Secunden (§. 30.), subtrahire ihn von dem nächst grösseren in der Tabelle, multiplicire diesen Unterschied durch die Anzahl der oben weggelassenen Secunden und dividire das Product durch 60. Den dadurch erhaltenen Quotienten addire man dann dem zuerst in der Tabelle gesuchten *Sinus*; dadurch erhält man jenen des gegebenen Winkels.“ Nämlich

$$\begin{array}{r} \sin. 35^{\circ} 52' = 58590,1 \\ \frac{15 \cdot 23,57}{60} \text{ wegen } 15'' = 5,89 \text{ folglich} \\ \hline \sin. 35^{\circ} 52' 15'' = 58595,99. \end{array}$$

2) Diesem gemäß erhält man auch den $\sin. 74^\circ 12' 32''$ auf folgende Art:

$$\begin{array}{rcl} \sin. 74^\circ 12' & = & 96221,8 \\ \frac{7,92.32}{60} \text{ wegen } 32'' & = & 4,22 \text{ folglich} \\ \hline \sin. 74^\circ 12' 32'' & = & 96226,02. \end{array}$$

3) Um den Cosinus eines Winkels mit Secunden zu finden, verfähre man wie in obiger practischen Regel gezeigt wurde, (so daß man statt des Sinus den Cosinus nach §.30.2. nimmt), *nur subtrahire man den gefundenen Quotienten für die Secunden von dem in der Tabelle zuerst gesuchten Cosinus*, weil durch die Zunahme des Winkels die Abnahme des Cosinus bedingt ist; d. i.

$$\begin{array}{rcl} \cos. 35^\circ 52' & = & 81038,26 \\ \frac{17,04.15}{60} \text{ wegen } 15'' & = & 4,26 \text{ also} \\ \hline \cos. 35^\circ 52' 15'' & = & 81034. \end{array}$$

4) Eben so erhält man

$$\begin{array}{rcl} \cos. 74^\circ 12' & = & 27228,02 \\ \frac{27,09.32}{60} \text{ wegen } 32'' & = & 14,93, \text{ also} \\ \hline \cos. 74^\circ 12' 32'' & = & 27213,09. \end{array}$$

Zusatz. Wie 1) findet man auch die Tangente und Secante, und wie 3) die Cotangente so wie die Cosecante eines Winkels, der auch Secunden bey sich hat.

§. 32.

Aufgabe. Für einen Winkel, der keine Secunden enthält, z. B. für $60^\circ 34'$ und $56^\circ 18'$ den Logarithmus seines Sinus und den seines Cosinus zu finden.

Auflösung. 1) Aus der ersten Tabelle ist (nach §. 29.) Seite 147. $\log. \sin. 36^\circ 34' = 9,7750697$, und Seite 136. $\log. \sin. 56^\circ 18' = 9,9200994$.

2) Um den $\log. \cos. 36^\circ 34'$ zu finden, verfähre man ganz wie §. 30. 2. erklärt wurde, nur schreibe man statt des Cosinus den Logarithmus des Cosinus heraus. Nämlich es ist $\log. \cos. 36^\circ 34' = 9,9048043$. Eben so ist auch $\log. \cos. 56^\circ 18' = 9,7441712$.

Zusatz. Wie 1) findet man den *log. tang.* und wie 2) den *log. cot.* für obige Winkel.

§. 33.

Aufgabe. Für einen Winkel, welcher auch Secunden bey sich hat, z. B. für $36^{\circ} 18' 24''$, den Logarithmus seines Sinus, so wie den seines Cosinus zu finden.

Auflösung. 1) Man findet bey Betrachtung der trig. Tabellen, daß die Unterschiede der Logarithmen trigonometrischer Linien von sehr wenig verschiedenen Winkeln sich verhalten, wie die Unterschiede dieser Winkel, d. i. wenn A, B, C sehr wenig verschiedene Winkel bezeichnen, so ist $C - A : B - A = \log. \sin. C - \log. \sin. A : \log. \sin. B - \log. \sin. A$.

Setzt man für diese Aufgabe $A = 36^{\circ} 18'$, $B = 36^{\circ} 18' 24''$ und $C = 36^{\circ} 19'$, so ist nach obiger Proportion

$$1' : 24'' = \log. \sin. 36^{\circ} 19' - \log. \sin. 36^{\circ} 18' : \log. \sin. 36^{\circ} 18' 24'' - \log. \sin. 36^{\circ} 18'.$$

$$\text{oder } 60'' : 24'' = 0,0001719 : \log. \sin. 36^{\circ} 18' 24'' - 9,7723314,$$

$$\text{woraus } \log. \sin. 36^{\circ} 18' 24'' - 9,7723314 = \frac{0,0001719 \cdot 24}{60}$$

$$= 0,0000688.$$

$$\text{also } \log. \sin. 36^{\circ} 18' 24'' = 9,7723314 + 0,0000688$$

$$= 9,7724002.$$

Hieraus ergibt sich folgende practische Regel:

„Man suche in der Tabelle den Logarithmus des Sinus des gegebenen Winkels mit Hinweglassung der Secunden (§. 32.), subtrahire ihn von dem nächst gröfseren in der Tabelle, multiplicire diesen Unterschied durch die Zahl der weggelassenen Secunden, und dividire das Product durch 60. Den Quotienten addire man dann der Mantisse des zuerst in der Tabelle gesuchten Logarithmus, so erhält man den *log. sin.* für den gegebenen Winkel.

Diesem nach ist also für obige Aufgabe:

$$\log. \sin. 36^{\circ} 18' = 9,7723314$$

$$\frac{1719 \cdot 24}{60} \text{ wegen } 24'' = 688, \text{ also}$$

$$\log. \sin. 36^{\circ} 18' 24'' = 9,7724002.$$

2) Will man den Logarithmus des Cosinus eines Winkels mit Secunden, so verfähre man eben so wie 1) (so dafs man statt des $\log. \sin.$ den $\log. \cos.$ nimmt), nur subtrahire man den berechneten Quotienten für die Secunden von der Mantisse des in der Tabelle zuerst gesuchten Logarithmus des Cosinus, weil durch die Zunahme des Winkels die Abnahme seines Cosinus, also auch die des Logarithmus dieses Cosinus bedingt ist. Nämlich

$$\begin{array}{rcl} \log. \cos. 36^\circ 18' & = & 9,9062964 \\ \frac{928. 24}{60} & \text{wegen } 24'' = & 371, \text{ also} \\ \hline \log. \cos. 36^\circ 18' 24'' & = & 9,9062593. \end{array}$$

I. Zusatz. Wie 1) findet man den Logarithmus der Tangente, und wie 2) den der Cotangente eines Winkels mit Secunden.

II. Zusatz. Enthält ein Winkel keine Grade, sondern Minuten und Secunden oder letztere allein, z. B. $0^\circ 3' 28''$ oder $0^\circ 0' 15''$; so findet man seinen $\log. \sin.$ so wie $\log. \text{tang.}$ schon bestimmt in der zweyten Tabelle, welche Seite 183 anfängt. Es ist nämlich

$$\begin{array}{l} \log. \sin. 0^\circ 3' 28'' = 7,0036381, \text{ eben so} \\ \log. \text{tang. } 0^\circ 3' 28'' = 7,0036383, \log. \sin. 0^\circ 0' 15'' \\ = 5,3616661 = \log. \text{tang. } 0^\circ 0' 15''. \end{array}$$

Auf ähnliche Art findet man die $\log. \cos.$ oder $\log. \cot.$ für Winkel, welche gröfser sind als 89° , indem man von diesen Winkeln die Complementary nimmt, und dafür aus der zweyten Tabelle den $\log. \sin.$ oder $\log. \text{tang.}$ nimmt. So ist z. B. $\log. \cos. 89^\circ 29' 20'' = \log. \sin. 0^\circ 30' 40'' = 7,9503869$ etc. Den $\log. \cos.$ oder $\log. \cot.$ eines solchen Winkel findet man aus der ersten Tabelle wie in der Aufgabe 1) und 2) gezeigt wurde.

III. Zusatz. Aus diesem und aus §. 33. findet man mit Hilfe der Formeln VI. und VII. den $\log. \sec.$ und $\log. \text{cosec.}$ eines Winkels. Denn, da $\sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha}$ u. $\text{cosec. } \alpha = \frac{1}{\sin. \alpha}$ ist, so ist auch $\log. \sec. \alpha = \log. 1 - \log. \cos. \alpha$ und

$\log. \operatorname{cosec}. \alpha = \log. 1 - \log. \sin. \alpha$, welche Werthe leicht nach Obigem berechnet werden können. Nur ist zu bemerken, daß $\log. \cos. \alpha$ und $\log. \sin. \alpha$ (nach §. 28. Zus. II.) für den Radius 1 verwandelt werden müssen.

§. 34.

Aufgabe. Für einen stumpfen oder erhabenen Winkel eine trigonometrische Linie, so wie ihren Logarithmus zu finden.

Auflösung. Man nehme die trigonometrische Linie seines Supplements oder ihren Logarithmus, denn alle trigonometrischen Linien für stumpfe und erhabene Winkel gleichen, ihrer Größe nach, jenen ihrer Supplemente. So ist z. B. $\log. \sin. 120^\circ = \log. \sin. 60^\circ = 9,9375306$.

Ergäbe sich der Fall, daß trigonometrische Linien, für welche die Logarithmen gesucht werden sollen, negativ sind; so nehme man die Logarithmen der als positiv gedachten trigonometrischen Linien, und berücksichtige den Einfluß des negativen Werthes derselben auf die Berechnung noch besonders. Käme z. B. in einem Producte der Factor $\sin. 236^\circ$ vor, so nehme man bey der logarithmischen Berechnung dieses Productes anstatt des $\log. \sin. 236$ den $\log. \sin. 56^\circ = 9,9185742$, bedenke aber, daß wegen des negativen Factors $\sin. 236^\circ$ das berechnete Product ebenfalls negativ wird.

II. Für jede gegebene trigonometrische Linie, so wie für jeden gegebenen Logarithmus einer solchen Linie den entsprechenden Winkel zu finden.

§. 35.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus, z. B. für $\sin. x = 92898,96$ oder für $\cos. x = 81034$, den entsprechenden Winkel zu finden.

Auflösung. 1) Gemäfs §. 31. 1. ist bekannt, daß $C - A : B - A = \sin. C - \sin. A : \sin. B - \sin. A$.

Suchet man in der Tabelle unter den Sinusen den, dem gegebenen zunächst kommenden, kleineren und größeren

(zwischen welche nähmlich der gegebene fällt) und benennt man den Winkel des ersteren durch A und den des letzteren durch C, so wie den zu suchenden Winkel x durch B; so entsteht durch diese Aufgabe aus obiger Proportion:

$$1' : B - 68^{\circ} 16' = 10,77 : 7,23 \text{ oder}$$

$$60'' : B - 68^{\circ} 16' = 10,77 : 7,23, \text{ woraus}$$

$$B - 68^{\circ} 16' = \frac{7,23 \cdot 60}{10,77} = 40'', \text{ also}$$

$$B = 68^{\circ} 16' + 40'' = 68^{\circ} 16' 40'' = x,$$

Hieraus fließet folgende practische Regel:

„Man suche in der Tabelle den dem gegebenen zunächst kommenden kleineren Sinus, schreibe seine unterschiedenen letzteren Zahlziffer unter die des gegebenen und rechts den Winkel des herausgeschriebenen Sinus; auch subtrahire man sogleich diesen letzteren Sinus von seinem nächst höheren in der Tabelle, und schreibe diesen Unterschied ebenfalls rechts an. Nun subtrahire man die untereinander geschriebenen Sinus, multiplicire den Rest durch 60, und dividire das Product durch obigen Unterschied, dann erhält man als Quotient die Zahl der Secunden, welche dem rechts herausgeschriebenen Winkel addirt werden müssen, um den, dem gegebenen Sinus entsprechenden, ganzen Winkel zu bekommen.“ Nähmlich

sin. x = 92898,96	x = 68° 16'
1,73	
7,23	+ 40'' also
60	x = 68° 16' 40''
433,80	
430,8	
300	

2) Um für den Cosinus, z. B. für $\cos. x = 81043$, den entsprechenden Winkel zu finden, suche man in der Tabelle unter den Sinusen den diesem gegebenen zunächst kommenden kleineren, nehme aber den in der horizontalen Linie auf der anderen Seite stehenden Winkel und verfare übrighens ganz wie in obiger practischen Regel gezeigt wurde; nur subtrahire man die gefundenen

Secunden von dem rechts angeschriebenen Winkel, weil durch die Zunahme des Cosinus die Abnahme seines Winkels bedingt ist. Nämlich

cos. x = 81034		x = 35° 53'	
21,22			— 45'', also
12,78		x = 35° 52'	15''.
60	17, 04		
766,80	45''		
681,6			
8520			
8520			
0			

I. Zusatz. Wie 1) findet man auch den für eine gegebene Tangente und wie 2) den für eine gegebene Cotangente entsprechenden Winkel.

II. Zusatz. Ist der Sinus oder Cosinus etc. etc. nicht schon für den Radius der Tabellen ausgedrückt, so verwandle man ihn für solchen nach §. 28. Zus. III., und verfähre übrigens wie oben.

III. Zusatz. Da einige trigonometrische Tabellen die Secanten und Cosecanten nicht enthalten, so wollen wir auch angeben, wie man mit Hilfe der sin. oder cosin. die entsprechenden Winkel x aus $\sec. x = m$ oder aus $\csc. x = n$ findet.

Ist z. B. aus $\sec. x = m$ der Winkel x zu finden, so benütze man die Formel $\sec. x$ oder $m = \frac{r^2}{\cos. x}$, woraus $\cos. x = \frac{r^2}{m}$ ist, d. h. man dividire mit der gegebenen Zahl der Secante das Quadrat des Radius, so erhält man den Cosinus des zu suchenden Winkels x, welcher letztere nach 2) leicht gefunden werden kann. — Auf ähnliche Art findet man für $\csc. x = n$ den Winkel x; denn es ist $\csc. x$ oder $n = \frac{r^2}{\sin. x}$, woraus $\sin. x = \frac{r^2}{n}$ ist, d. h. man dividire das Quadrat des Radius durch die Zahl der gegebenen Cosecante, so erhält man den Sinus des zu suchenden Winkels x, welcher letztere aus 1) leicht zu finden ist.

§. 36.

Aufgabe. Für den Logarithmus des Sinus oder Cosinus eines Winkels, z. B. für $\log. \sin. x = 9,1234567$ oder für $\log. \cos. x = 9,1392119$, den entsprechenden Winkel zu finden.

Auflösung. 1) Nach §. 33. 1. ist

$$C - A : B - A = \log. \sin. C - \log. \sin. A : \log. \sin. B - \log. \sin. A.$$

Man suche aus der Tabelle unter den Logarithmen der Sinus den, dem gegebenen zunächst kommenden, kleineren und gröfseren und benenne den entsprechenden Winkel des ersteren durch A und den des letzteren durch C, so wie den zu suchenden Winkel x durch B. Es wird dann für obige Aufgabe aus der Proportion:

$$1' : B - 7^\circ 38' : 9416 : 1506, \text{ oder}$$

$$60'' : B - 7^\circ 38' : 9416 : 1506, \text{ woraus}$$

$$B - 7^\circ 38' = \frac{60 \cdot 1506}{9416} = 9,59'', \text{ also}$$

$$B = 7^\circ 38' + 9,59'' = 7^\circ 38' 9,6'' = x.$$

Daher folgende practische Regel:

„Man suche in der Tabelle den, dem gegebenen Logarithmus-Sinus zunächst kommenden, kleineren, schreibe die letzten unterschiedenen Zahlen seiner Mantisse unter die des gegebenen und rechts den Winkel des herausgeschriebenen $\log. \sin.$, subtrahire sogleich auch diesen $\log. \sin.$ von seinem nächst höheren in der Tabelle und schreibe diesen Unterschied ebenfalls rechts an. Nun subtrahire man die untereinander geschriebenen Mantissen, multiplicire den Rest durch 60 und dividire das Product durch obigen Unterschied; dann erhält man als Quotient die Zahl der Secunden, welche dem rechts angeschriebenen Winkel addirt werden müssen, um den, dem gegebenen $\log. \sin.$ entsprechenden, ganzen Winkel zu erhalten. Nämlich

$\log. \sin. x = 9,1234567$	
3061	
1506	
60	9416
90360	9,59''
84744	
56160	
47080	
90800	

$x = 7^\circ 38'$	
	+ 9,6''
$x = 7^\circ 38'$	9,6''

2) Um für den $\log \cos.$, z. B. für $\log \cos. x = 9,1392119$, den entsprechenden Winkel zu finden, suche man in der Tabelle unter den $\log \sin.$ den, diesem gegebenen Logarithmus zunächst kommenden, kleineren, nehme aber den in der horizontalen Linie auf der anderen Seite stehenden Winkel und verfähre übrigens ganz wie in obiger practischen Regel gezeigt wurde, nur subtrahire man die gefundenen Secunden von dem rechts angeschriebenen Winkel, denn für einen grösseren Cosinus entspricht ein kleinerer Winkel. Nämlich

$\log \cos. x = 9,1392119$ 0370 1749 60 9075 104940 9075 14190 etc.	$x = 82^\circ 5'$ — 11" also $x = 82^\circ 4' 49''.$
--	--

I. Zusatz. Wie 1) findet man für $\log \tan.$ und wie 2) für $\log \cot.$ den entsprechenden Winkel.

II. Zusatz. Ist der Logarithmus einer trigonometrischen Linie für den Radius 1 gegeben, so verwandle man ihn vor Allem für den Radius der Tabelle, indem man seiner Characteristik 10 addirt (§. 28. Zus. II.).

III. Zusatz. Soll man für $\log \sec. x = m$ den Winkel x finden, so nehme man die Formel VI. zu Hilfe. Es ist nämlich $\sec. x$ oder $m = \frac{r^2}{\cos. x}$, also $\cos. x = \frac{r^2}{m}$ und $\log \cos. x = \log r^2 - \log m = 20 - \log m$, d. h. man subtrahire den gegebenen Logarithmus der Secante von 20, so erhält man den $\log \cos.$ des zu suchenden Winkels x , welcher letztere aus 1) leicht zu finden ist. Auf ähnliche Art erhält man mit Hilfe der Formel VII. den für einen $\log \operatorname{cosec.}$ entsprechenden Winkel.

IV. Zusatz. Indem dieselbe trigonometrische Linie auch für die verschiedenen Supplemente des gefundenen spitzen Winkels entspricht, so muß man aus anderen Verhältnissen bestimmen, ob der gefundene Winkel, für einen gegebenen Fall, spitz, stumpf oder erhaben etc. genommen werden muß.

V. Abschnitt.

Berechnung der Dreyecke.

A. Berechnung der Seiten und Winkel.

§. 37.

Erklärung. Die ebene Trigonometrie hat folgende Fälle zu lösen.

I. In einem Dreyecke sind gegeben: eine Seite und zwey Winkel, und zwar

α. eine Seite und die beyden daranliegenden Winkel;
oder

β. eine Seite und zwey Winkel, wovon nur einer ihr anliegt.

Gesucht werden: der dritte Winkel und die beyden anderen Seiten.

II. In einem Dreyecke sind gegeben: zwey Seiten und ein Winkel, und zwar

α. der von den gegebenen Seiten nicht eingeschlossene,

β. der davon eingeschlossene Winkel.

Gesucht werden: die beyden anderen Winkel und die dritte Seite.

III. In einem Dreyecke sind die drey Seiten gegeben; man soll daraus die drey Winkel suchen.

§. 38.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke verhalten sich zwey Seiten zu einander wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel.

Beweis (Fig. 7.) Thes. $BC : AC = \sin. A : \sin. B$.
Man beschreibe um das Dreyeck ABC einen Kreis (Geom. §. 54.), ziehe von dessen Mittelpunkt D nach allen Winkel-Spitzen des Dreyeckes gerade Linien und fälle von D auf die beyden in der Proportion vorkommenden Seiten die Senkrechten DF und DE; dadurch wird:

$$\frac{1}{2}BC = CF = \sin. \frac{1}{2}BDC \text{ (§. 2. Zus. III.)} = \sin. A \text{ (Geom. §. 58.)}$$
$$\frac{1}{2}AC = AE = \sin. \frac{1}{2}ADC \text{ (§. 2. Zus. III.)} = \sin. B \text{ (Geom. §. 58.).}$$

Da nun $BC : AC = \frac{1}{2} BC : \frac{1}{2} AC$ ist, so ist auch
 $BC : AC = \sin. A : \sin. B.$

Dieses Verhältniß „ $\sin. A : \sin. B$ “ gilt nicht bloß für den Radius AD, sondern für jeden beliebigen Radius, mithin auch für jenen der Tabelle. (§. 10. Zus.)

Auf ähnliche Art zeigt man auch, daß

$$AB : BC = \sin. C : \sin. A \text{ und}$$

$$AB : AC = \sin. C : \sin. B \text{ ist.}$$

§. 39.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke verhält sich die Hypotenuse zu einer Kathete wie der Radius [$\sin. tot.$] zum Sinus des der letzteren gegenüber stehenden oder zum Cosinus des ihr anliegenden spitzen Winkels; eben so verhält sich auch die eine Kathete zur anderen, wie der Radius [$\sin. tot.$] zur Tangente des der letzteren gegenüberstehenden oder zur Cotangente des ihr anliegenden spitzen Winkels.

Beweis. (Fig. 3.) Es ist nach §. 2. Z. V. und §. 3. Z. V.
 $AB : AC = r : \sin. B$ oder
 $= r : \cos. A.$

Dann nach §. 7. Zus. V. auch

$$BC : AC = r : \tan. B \text{ oder}$$

$$= r : \cot. A.$$

Diese Proportionen gelten nicht bloß für den Radius oder $\sin. tot. = r$, sondern auch für jeden beliebigen anderen, also auch für jenen der Tabellen (§. 10. Zus.).

§. 40.

Aufgabe. (§. 37. I. α .) (Fig. 8.) Im Dreyecke ABC ist $BC = a = 580'$, $B = 62^\circ 15'$, $C = 59^\circ 48'$; wie groß ist der dritte Winkel A und wie groß sind die beyden anderen Seiten $AC = b$ und $AB = c$. *)

Auflösung. 1) Es ist $A = 180^\circ - [B + C] = 180^\circ - [62^\circ 15' + 59^\circ 48']$
 $= 180^\circ - 122^\circ 3' = 57^\circ 57'.$

*) In der Trigonometrie bezeichnet man die Winkel eines Dreyeckes mit den großen, an ihren Scheiteln stehenden, Buchstaben, die Seiten aber mit den gleichnamigen kleineren Buchstaben der ihnen gegenüberstehenden Winkel.

2) Ferner ist $b : a = \sin. B : \sin. A$. (§. 38.), also

$$b = \frac{a \cdot \sin. B}{\sin. A} = \frac{580 \cdot \sin. 62^\circ 15'}{\sin. 57^\circ 57'}; \text{ mithin}$$

$$\log. b = \log. 580 + \log. \sin. 62^\circ 15' - \log. \sin. 57^\circ 57'.$$

$$\text{Nun ist } \log. 580 = 2,7634280$$

$$\log. \sin. 62^\circ 15' = 9,9469372$$

$$\log. 580 \cdot \sin. 62^\circ 15' = 12,7103652$$

$$\log. \sin. 57^\circ 57' = 9,9281834, \text{ mithin}$$

$$\log. b = 2,7821818 \quad \text{und } b = 605,59'$$

$$\begin{array}{r|l} 141 & 718 \\ \hline 6770 & \end{array}$$

Also die Seite $b = 605,6'$.

3) Eben so ist $a : c = \sin. A : \sin. C$. (§. 38.) also

$$c = \frac{a \cdot \sin. C}{\sin. A} = \frac{580 \cdot \sin. 59^\circ 48'}{\sin. 57^\circ 57'}; \text{ mithin}$$

$$\log. c = \log. 580 + \log. \sin. 59^\circ 48' + \text{Dec. Erg. } \log. \sin. 57^\circ 57' - 10.$$

$$\text{Nun ist } \log. 580 = 2,7634280$$

$$\log. \sin. 59^\circ 48' = 9,9366519$$

$$\text{D.E. } \log. \sin. 57^\circ 57' = 0,0718166 (-10), \text{ folglich}$$

$$\log. c = 12,7718965 - 10$$

$$= 2,7718965 \quad \text{und } c = 591,42'$$

$$\begin{array}{r|l} 813 & 734 \\ \hline 1520 & \end{array}$$

Also ist die Seite $c = 591,4'$.

Der Fall §. 37. I. β ., in welchem nicht beyde gegebenen Winkel an der gegebenen Seite anliegen, wird auf dieselbe Art gelöst.

I. Zusatz. (Fig. 4.) Ist in dem bey A rechtwinkligen Dreyecke ABC aus $a = 254'$ und $B = 54^\circ 12'$ jede der Katheten zu suchen, so setze man (für $\sin. tot. = 1$)

$$a : b = 1 : \sin. B, (\S. 39.), \text{ woraus}$$

$$b = a \cdot \sin. B = 254 \cdot \sin. 54^\circ 12', \text{ also}$$

$$\log. b = \log. 254 + \log. \sin. 54^\circ 12'.$$

$$\log. 254 = 2,4048337$$

$$\log. \sin. 54^\circ 12' = 0,9090550 - 1 (\text{für } \sin. tot. = 1), \text{ also}$$

$$\log. b = 3,3138887 - 1$$

$$= 2,3138887 \quad \text{und } b = 206'.$$

Eben so ist $a : c = 1 : \cos. B$ (§. 39.), woraus

$$c = a. \cos. B = 254, \cos. 54^\circ 12' \text{ also}$$

$$\log. c = \log. 254 + \log. \cos. 54^\circ 12'.$$

$$\log. 254 = 2,4048337$$

$$\log. \cos. 54^\circ 12' = 0,7671244 - 1, \text{ also}$$

$$\log. c = 2,1719581 \text{ und } c = 148,6'.$$

II. Zusatz. (Fig. 4.) Sollen im rechtwinkligen Drey-ecke ABC, aus $c = 148,6'$ und $B = 54^\circ 12'$, die andere Kathete und die Hypotenus gesucht werden, so setze man (für $\sin. tot. = 1$.)

$$c : b = 1 : \tan. C \text{ (§. 39.), also}$$

$$b = c. \tan. C = 148,6. \tan. 54^\circ 12' \text{ und}$$

$$\log. b = \log. 148,6 + \log. \tan. 54^\circ 12'.$$

$$\log. 148,6 = 2,1720188$$

$$\log. \tan. 54^\circ 12' = 0,1419306, \text{ mithin}$$

$$\log. b = 2,3139494 \text{ und } b = 206'.$$

Ferner ist:

$$a : c = 1 : \cos. B \text{ (§. 39.), woraus}$$

$$a = \frac{c}{\cos. B} = \frac{148,6}{\cos. 54^\circ 12'}, \text{ und}$$

$$\log. a = \log. 148,6 - \log. \cos. 54^\circ 12' \text{ d. i.}$$

$$\log. 148,6 = 2,1720188$$

$$\log. \cos. 54^\circ 12' = 0,7671244 - 1, \text{ also}$$

$$\log. a = 2,4048944 \text{ und } a = 254'$$

III. Zusatz. (Fig. 9.) Soll man im gleichschenkligen Dreyecke ABC aus dem Schenkel c und dem Winkel B die Grundlinie a finden, so fälle man die Senkrechte AD , dann ist $BD = \frac{1}{2} a$, und im rechtwinkligen $\triangle ABD$:

$$AB : BD = 1 : \cos. B \text{ oder}$$

$$c : \frac{1}{2} a = 1 : \cos. B, \text{ woraus}$$

$$a = 2c. \cos. B \text{ etc. ist.}$$

Ist im gleichschenkligen $\triangle ABC$ anstatt des Schenkels die Grundlinie gegeben und ersterer zu suchen, so ist aus obiger Proportion

$$c = \frac{a}{2. \cos. B} \text{ etc. etc.}$$

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn anstatt des Winkels B der Winkel A gegeben ist, welcher letztere durch die Senkrechte AD halbirt wird.

§. 41.

Aufgaben. (δ. 37. II. α.)

I. (Fig. 8.) Im Dreyecke ABC ist $B = 83^{\circ} 15'$, $b = 820'$ und $c = 680'$; wie groß sind C, A und a?

Auflösung. Es ist

$b : c = \sin. B : \sin. C$ (§. 38.), woraus

$$\sin. C = \frac{c. \sin. B}{b} = \frac{680. \sin. 83^{\circ} 15'}{820}, \text{ also}$$

$$\log. \sin. C = \log. 680 + \log. \sin. 83^\circ 15' + D.E. \log. 820 - 10.$$

Nun ist $\log. 680 = 2,8325089$

$$\log. \sin. 83^{\circ} 15' = 9,9969702$$

D.E.log. 820 = 7,0861861 (—10) mithin

$$\log. \sin. C = 9,9156742 \quad | \quad \text{und } C = 55^\circ 26' 19''.$$

460

282

806

602

870

104

Da dem nämlichen Sinus sowohl der spitze Winkel C als dessen stumpfer Nebenwinkel entspricht, so müssen entweder die gegebenen Stücke oder andere Umstände entscheiden, welcher von diesen beyden Winkeln der gesuchte sey. Für den Fall dieser Aufgabe, wo zwey Seiten und der der grösseren derselben gegenüberstehende Winkel gegeben sind (Geom. §. 30. Z. I.), entscheiden die gegebenen Stücke. Es muß nämlich hier C jedes Mahl spitz genommen werden, sowohl wenn B spitz ist, indem für $c < b$ auch $C < B$ werden muß (Geom. §. 28.), als auch, wenn B stumpf ist, da stets $C + B < 180^\circ$ seyn muß (Geom. §. 27.).

Es ist also $A = 180^\circ - [B + C] = 180^\circ - [83^\circ 15' + 55^\circ 26' 19'']$
 $= 180^\circ - 138^\circ 41' 19'' = 41^\circ 18' 41''.$

Dann $b : a = \sin. B : \sin. A$ (§. 38.), woraus

$$a = \frac{b \cdot \sin. A}{\sin. B} = \frac{820 \cdot \sin. 41^\circ 18' 41''}{\sin. 83^\circ 15'} = 545'.$$

II. (Fig. 10.) Im Dreyecke ABC sey $C = 12^\circ 3'$,
 $b = 1826'$ und $c = 920'$; wie groß sind B, A und a?

Auflösung. Es ist:

$$c : b = \sin. C : \sin. B. (\S. 38.), \text{ woraus}$$

$$\sin. B = \frac{b \cdot \sin. C}{c} = \frac{1826 \cdot \sin. 12^\circ 3'}{920}, \text{ also}$$

$$\log. \sin. B = \log. 1826 + \log. \sin. 12^\circ 3' + D. E. \log. 920 - 10.$$

$$\text{Nun ist } \log. 1826 = 3,2615008$$

$$\log. \sin. 12^\circ 3' = 9,3196581$$

$$D. E. \log. 920 = 7,0362122 (-10). \text{ Mithin}$$

$\log. \sin. B = 9,6173711$ $\underline{1721}$ 1990 $\underline{60}$ 119400	$und B = 24^\circ 28' 43'' \text{ oder}$ $= 155^\circ 31' 17'' (\S. 36.$ Zus. IV.)
2775 $\underline{43}$	

Für den Fall, daß $B = 24^\circ 28' 43''$ ist, wird $A = 180^\circ -$
 $[12^\circ 3' + 24^\circ 28' 43''] = 143^\circ 28' 17''$, ferner

$$c : a = \sin. C : \sin. A$$

$$a = \frac{c \sin. A}{\sin. C} = \frac{920 \cdot \sin. 143^\circ 28' 17''}{\sin. 12^\circ 3'}, \text{ also}$$

$$\log. a = \log. 920 + \log. \sin. 143^\circ 28' 17'' + D. E. \log. \sin. 12^\circ 3' - 10.$$

$$\log. 920 = 2,9637878$$

$$\left. \begin{array}{l} \log. \sin. 143^\circ 28' 17'' \\ \text{oder } \log. \sin. 36^\circ 31' 43'' \end{array} \right\} = \begin{array}{l} 9,7745583 \\ 1222 \end{array}$$

$$D. E. \log. \sin. 12^\circ 3' = 0,6803419 (-10)$$

$$\log. a = 3,4188102 \text{ und } a = 2623.$$

Für den Fall, daß $B = 155^\circ 31' 17''$ ist, wird
 $A = 180^\circ - [12^\circ 3' + 155^\circ 31' 17''] = 12^\circ 25' 43''$, ferner:

$$c : a = \sin. C : \sin. A$$

$$a = \frac{c \sin. A}{\sin. C} = \frac{920 \cdot \sin. 12^\circ 25' 43''}{\sin. 12^\circ 3'}, \text{ also}$$

$$\log. a = \log. 920 + \log. \sin. 12^\circ 25' 43'' + D. E. \log. \sin. 12^\circ 3' - 10$$

$$\log. 920 = 2,9637878$$

$$\log. \sin. 12^\circ 25' 43'' = \begin{array}{l} 9,3324777 \\ 4109 \end{array}$$

$$D. E. \log. \sin. 12^\circ 3' = 0,6803419 (-10)$$

$$\log. a = 2,9770183 \text{ und } a = 948'.$$

Es gibt also für diese Aufgabe, wo zwey Seiten und der, der kleineren derselben gegenüberstehende Winkel gegeben sind, zwey Dreyecke, entweder $\triangle ABC$ oder $\triangle AB'C$. Ob das Dreyeck bey B einen spitzen oder stumpfen Winkel haben muß, muß aus andern Verhältnissen bestimmt werden.

I. Zusatz. (Fig. 4.) Soll im rechtwinkligen Dreyecke ABC, aus $a = 500'$ und $b = 300'$ B, C, dann c gesucht werden, so setze man

$$a : b = 1 : \sin. B, \text{ woraus}$$

$$\sin. B = \frac{b}{a} = \frac{300}{500}, \text{ also}$$

$$\log. \sin. B = \log. 3 - \log. 5$$

$$\log. 3 = \overset{+1}{0,4771213} - 1$$

$$\log. 5 = 0,6989700$$

$$\log. \sin. B = 0,7781513 - 1 \text{ (für den Radius 1.)}$$

$$= 9,7781513 \text{ (für den Radius der Tab.)}$$

186	also B = 36° 52' 12".
327	1684
60	
19620	12

$$\text{Dann ist } C = 90^\circ - 36^\circ 52' 12'' = 53^\circ 7' 48''.$$

$$c = 400' \text{ findet man wie §. 40. Zus. I.}$$

II. Zusatz. (Fig. 9.) Soll man im gleichschenkligen Dreyecke ABC, aus einem Schenkel c und der Grundlinie a, den Winkel B finden, so fälle man die Senkrechte AD, dann ist im rechtwinkligen $\triangle ABD$.

$$AB : BD = 1 : \cos. B \text{ oder}$$

$$c : \frac{1}{2}a = 1 : \cos. B, \text{ woraus}$$

$$\cos. B = \frac{a}{2c} \text{ ist.}$$

Will man aber aus den gegebenen Stücken den Winkel an der Spitze A finden, so setze man

$$AB : BD = 1 : \sin. BAD \text{ oder}$$

$$c : \frac{1}{2}a = 1 : \sin. \frac{1}{2}A, \text{ woraus}$$

$$\sin. \frac{1}{2}A = \frac{a}{2c} \text{ ist.}$$

§. 42.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe zur Tangente der halben Differenz der diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel.

Bewcis. (Fig. 11.)

Thes. $a+b : a-b = \text{tang. } \frac{1}{2}[A+B] : \text{tang. } \frac{1}{2}[A-B]$.

Dat. 1) Man beschreibe mit der größeren der beyden in Proportion gesetzten Seiten aus dem Puncte A^c , wo sie zusammenstossen, einen Kreis, verlängere AC rückwärts und vorwärts bis an die Peripherie, ziehe endlich BD und BE, und errichte in E auf EB eine Senkrechte EF, welche durch die Verlängerung von AB in F geschnitten wird.

2) Es ist $p = \frac{1}{2}x$ (G. §. 58.) $= \frac{1}{2}[m+n] = \frac{1}{2}[A+B]$, ferner

3) ist $o = m - p = A - \frac{1}{2}[A+B] = \frac{1}{2}[A-B]$.

4) Es ist auch, da $y = m$ und $q = D$ ist, $\triangle AFE \sim \triangle ADB$, mithin $DB : EF = AD : AE$

$$= DC + AC : CE - AC$$

$$= a + b : a - b.$$

5) Da, im $\triangle FEB$, $FEB = 90^\circ$ ist, so muß

$$EB : EF = 1 : \text{tang. } o \quad (\S. 39.)$$

$$\text{oder } EB : EF = 1 : \text{tang. } \frac{1}{2}[A-B] \quad (3.)$$

6) Da, im $\triangle DEB$, $DBE = 90^\circ$ ist, so ist auch

$$EB : DB = 1 : \text{tang. } p \quad (\S. 39.)$$

$$\text{oder } EB : DB = 1 : \text{tang. } \frac{1}{2}[A+B] \quad (2.)$$

Da nun $EB : EF = 1 : \text{tang. } \frac{1}{2}[A-B]$ (5.) ist, so folgt

$$DB : EF = \text{tang. } \frac{1}{2}[A+B] : \text{tang. } \frac{1}{2}[A-B] \quad (\text{Arithm.})$$

Nun ist $DB : EF = a + b : a - b$ (4.), also auch

$$a + b : a - b = \text{tang. } \frac{1}{2}[A+B] : \text{tang. } \frac{1}{2}[A-B].$$

Diese Proportion gilt für jeden beliebigen *sin. tot.*, also auch für den der Tabellen. (§. 10. Zus.)

Anmerkung. Diese Proportion läßt sich auch auf folgende Art analytisch finden:

Aus §. 26. XXVI. und XXVIII. ist:

$$\sin. m + \sin. n = 2 \sin. \frac{1}{2}[m+n] \cos. \frac{1}{2}[m-n] \quad \text{und}$$

$$\sin. m - \sin. n = 2 \cos. \frac{1}{2}[m+n] \sin. \frac{1}{2}[m-n], \quad \text{also}$$

$$\frac{\sin. m + \sin. n}{\sin. m - \sin. n} = \frac{\sin. \frac{1}{2}[m+n] \cos. \frac{1}{2}[m-n]}{\cos. \frac{1}{2}[m+n] \sin. \frac{1}{2}[m-n]} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}[m+n]}{\text{tang. } \frac{1}{2}[m-n]} \quad (\text{xxx.})$$

also auch

$$\sin. m + \sin. n : \sin. m - \sin. n = \tan. \frac{1}{2}[m + n] : \tan. \frac{1}{2}[m - n], \text{ oder } \\ \sin. A + \sin. B : \sin. A - \sin. B = \tan. \frac{1}{2}[A + B] : \tan. \frac{1}{2}[A - B].$$

Nun ist im $\triangle ABC$ (Fig. 11.)

$$a : b = \sin. A : \sin. B \text{ (§. 38.) also auch}$$

$$a + b : a - b = \sin. A + \sin. B : \sin. A - \sin. B \\ = \tan. \frac{1}{2}[A + B] : \tan. \frac{1}{2}[A - B].$$

Diese Proportion gilt nicht bloß für $\sin. tot. = 1$, sondern auch für jeden andern, also auch für jenen der Tabellen (§. 10. Zus.).

§. 43.

Aufgabe. (§. 37. II. β .) (Fig. 8.) Im $\triangle ABC$ ist $a = 500'$, $c = 436'$ und $B = 85^\circ 3'$; wie groß ist A, C und b?

Auflösung. Man suche nach der Proportion des §. 42. aus den bekannten Stücken die Tangente der halben Differenz der beyden unbekannten Winkel und aus dieser mit Hülfe der Tabellen diese halbe Differenz selbst. Hat man die halbe Differenz der beyden unbekannten Winkel, so erhält man, indem such die halbe Summe dieser Winkel bekannt ist, den größeren Winkel, indem man die halbe Summe und halbe Differenz addirt, den kleineren aber, indem man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt.

Die dritte Seite findet man dann wie gewöhnlich nach §. 38.

Daher folgende Rechnung für diese Aufgabe:

$$\text{Es ist } \frac{1}{2}[A + C] = \frac{1}{2}[180^\circ - 83^\circ 3'] = 48^\circ 28' 30''.$$

$$\text{ferner } a + c : a - c = \tan. \frac{1}{2}[A + C] : \tan. \frac{1}{2}[A - C],$$

$$\text{oder } 936 : 64 = \tan. 48^\circ 28' 30'' : \tan. \frac{1}{2}[A - C],$$

$$\text{woraus } \tan. \frac{1}{2}[A - C] = \frac{64 \cdot \tan. 48^\circ 28' 30''}{936} \text{ und}$$

$$\log. \tan. \frac{1}{2}[A - C] = \log. 64 + \log. \tan. 48^\circ 28' 30'' - D. E. \log. 936 - 10.$$

$$\text{Nun ist } \log. 64 = 1,8061800$$

$$\log. \tan. 48^\circ 28' 30'' = 10,0526825$$

1272

$$D. E. \log. 936 = 7,0287242 (-10), \text{ also}$$

$$\log. \tan. \frac{1}{2}[A - C] = 8,8877139 \quad \frac{1}{2}[A - C] = 4^\circ 24' 56''.$$

61850

15289

60 16484

917340 55,6.

Da nun $\frac{1}{2} [A+C] = 48^\circ 28' 30''$ und
 $\frac{1}{2} [A-C] = 4^\circ 24' 56''$ ist, so entsteht durch
 Addition $A = 52^\circ 53' 26''$ und durch
 Subtraction $C = 44^\circ 3' 34''$.

Die dritte Seite des Dreyeckes, nämlich b , findet man wie gewöhnlich:

$$a : b = \sin. A : \sin. B. \text{ also}$$

$$b = \frac{a. \sin. B}{\sin. A} = \frac{500. \sin. 83^\circ 3'}{\sin. 52^\circ 53' 26''}, \text{ ferner}$$

$$\log. b = \log. 500 + \log. \sin. 83^\circ 3' + D. E. \log. \sin. 52^\circ 53' 26'' - 10.$$

$$\text{Nun ist } \log. 500 = 2,6989700$$

$$\log. \sin. 83^\circ 3' = 9,9967971$$

$$D. E. \log. \sin. 52^\circ 53' 26'' = 0,0982778 (-10) \text{ folglich}$$

$$\log. b = 2,7940449 \text{ und } b = 622,4'$$

Es ist also die Seite $b = 622'$.

§. 44.

Aufgabe. Aus zwey Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel eines Dreyeckes unmittelbar die dritte Seite zu finden.

Auflösung. Gegeben sey (Fig. 12.), im $\triangle ABC$, a , c und B ; gesucht werde b .

Man fälle AD senkrecht auf BC und setze $BD = x$, dann ist $DC = a - x$, ferner

$$[\text{aus } \triangle ABD], AD^2 = AB^2 - BD^2 = c^2 - x^2 \text{ und}$$

$$[\text{aus } \triangle ADC], AD^2 = AC^2 - DC^2 = b^2 - [a - x]^2, \text{ mithin}$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - [a - x]^2$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \text{ und}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ax}.$$

Nun suche man x aus dem $\triangle ABD$, d. i.

$$AB : BD = 1 : \cos. B \text{ (§. 39.) oder}$$

$$c : x = 1 : \cos. B, \text{ woraus}$$

$$x = c. \cos B.$$

Diesem nach ist die Seite

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos. B}.$$

I. Zusatz. Der Analogie nach ist

$$a = \sqrt{[b^2 + c^2 - 2bc \cos. A.]} \text{ und}$$

$$c = \sqrt{[a^2 + b^2 - 2ab \cos. C.]}$$

II. Zusatz. Ist in der Formel

$$b = \sqrt{[a^2 + c^2 - 2ac \cos. B.]}$$

der Winkel $B = 90^\circ$, so ist $\cos. B = \cos. 90^\circ = 0$, folglich wird das negative Glied $= 0$, und es ist für diesen Fall $b = \sqrt{[a^2 + c^2]}$ (Geom. §. 80. Zus. III.).

Ist hingegen B ein stumpfer Winkel, so wird der Factor $\cos. B$ negativ (§. 3. Z. II.), folglich auch das Product $2ac \cos. B$ selbst negativ. Da nun dieses Product abzuziehen ist, so wird in diesem Falle der Werth von $2ac \cos. B$ zu $a^2 + c^2$ addirt.

Beyspiel für diese Aufgabe.

Es sey, im $\triangle ABC$, $c = 436'$, $a = 500$ und $B = 83^\circ 3'$; man suche b .

Auflösung. Es ist nach Obigem:

$$b = \sqrt{[a^2 + c^2 - 2ac \cos. B.]} \text{ also}$$

$$b = \sqrt{[500^2 + 436^2 - 2 \cdot 500 \cdot 436 \cos. 83^\circ 3']}$$

$$= \sqrt{[250000 + 190096 - 436000 \cos. 83^\circ 3']}$$

Man berechne vor allem das negative Glied mit Hülfe der Logarithmen. Nämlich:

$$\log. [436000 \cos. 83^\circ 3'] = \log. 436000 + \log. \cos. 83^\circ 3'.$$

$$\text{Nun ist } \log. 436000 = 5,6394865$$

$$\log. \cos. 83^\circ 3' = 0,0827966 - 1^*), \text{ also}$$

$$\log. [436000 \cos. 83^\circ 3'] = 4,7222831 \text{ und}$$

$$436000 \cos. 83^\circ 3' = 52757,36.$$

Diesem nach ist:

$$b = \sqrt{[250000 + 190096 - 52757,36]}$$

$$= \sqrt{[440096 + 52757,36]}$$

$$= \sqrt{387338,64} = 622,4.$$

$$\text{Also } b = 622'. \quad (\S. 43.).$$

*) Da die Formel für b für den Radius 1 entworfen wurde, so ist nöthig, auch mit dem $\log. \cos.$ für den Radius 1 zu rechnen.

III. Zusatz. Um die Formel $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos. B}$ für logarithmische Berechnung tauglicher zu machen, setze man darin $\cos. B = 1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} B$ (§. 22. Zus.), nämlich

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac [1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} B] \\ &= a^2 + c^2 - 2ac + 4ac \sin^2. \frac{1}{2} B \\ &= [a - c]^2 + 4ac \sin^2. \frac{1}{2} B \\ &= [a - c]^2 \left[1 + \frac{4ac \sin^2. \frac{1}{2} B}{[a - c]^2} \right]. \end{aligned}$$

Setzt man ferner $\frac{4ac \sin^2. \frac{1}{2} B}{[a - c]^2} = \operatorname{tg}^2. \varphi$, so ist

$$b^2 = [a - c]^2 [1 + \operatorname{tg}^2. \varphi] = [a - c]^2 \sec^2. \varphi = \frac{[a - c]^2}{\cos^2. \varphi};$$

also $b = \frac{a - c}{\cos. \varphi}$; woraus sich der Werth von b leicht er-

gibt, wenn man zuerst aus obiger Formel $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{4ac \sin^2. \frac{1}{2} B}{[a - c]^2}}$
 $= \frac{2 \sin. \frac{1}{2} B \sqrt{ac}}{a - c}$ den Winkel φ berechnet hat.

(Man berechne auf diese Art obiges Zahlen-Beyspiel.)

§. 45.

Aufgabe. Aus zwey Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel eines Dreyeckes unmittelbar einen der beyden anderen Winkel zu finden.

Auflösung. (Fig. 12.) Im $\triangle ABC$ sey gegeben a , c und B ; gesucht werde der Winkel C .

1) Man fälle AD senkrecht auf BC , so ist, im $\triangle ADC$;

$$DC : AD = 1 : \operatorname{tang}. C \quad (\S. 39.)$$

$$\text{also } \operatorname{tang}. C = \frac{AD}{DC}.$$

2) Nun ist AD sowohl als DC durch die gegebenen Stücke auszudrücken. Es ist nämlich, im $\triangle ABD$,

$$AB : AD = 1 : \sin. B, \text{ folglich}$$

$$AD = AB \sin. B = c. \sin. B,$$

ferner ist $AB : BD = 1 : \cos. B$, mithin

$$BD = AB. \cos. B = c. \cos. B.$$

Endlich ist $DC = BC - BD = a - c. \cos. B$.

3) Da nach Obigem $\text{tang. } C = \frac{AD}{DC}$ (1) ist,

so ist auch $\text{tang. } C = \frac{c \cdot \sin. B}{a - c \cdot \cos. B}$ (2.)

I. Zusatz. Betrachtet man diese Formel, so ergibt sich der Analogie nach dafs, für A,

$$\text{tang. } A = \frac{a \cdot \sin. B}{c - a \cdot \cos. B} \text{ ist.}$$

II. Zusatz. Auch hier ist bey Berechnung dieser Formel wohl zu berücksichtigen, dafs, wenn $B = 90$ ist, das Product $c \cdot \cos. B = 0$, und dafs, wenn B ein stumpfer Winkel ist, dieses Product zu a addirt werden mufs. — Erhält man für $\text{tang. } C$ einen negativen Werth, so zeigt dieses an, dafs C ein stumpfer Winkel werden mufs; in diesem Falle suche man (als wäre der Werth von $\text{tang. } C$ positiv) mit Hülfe der Tabellen den entsprechenden Winkel, nehme aber davon das stumpfe Supplement.

Beyspiel über diese Aufgabe.

Es sey im $\triangle ABC$ (Fig. 12.) $c = 436'$, $a = 500'$ und $B = 83^\circ 3'$; wie groß ist C?

Auflösung. Es ist nach Obigem

$$\text{tang. } C = \frac{c \cdot \sin. B}{a - c \cdot \cos. B} = \frac{436 \cdot \sin. 83^\circ 3'}{500 - 436 \cdot \cos. 83^\circ 3'}$$

Man berechne mit Hülfe der Tabellen das Product des Nenners; nähmlich es ist:

$$\log. [436 \cdot \cos. 83^\circ 3'] = \log. 436 + \log. \cos. 83^\circ 3'$$

$$\log. 436 = 2,6394865$$

$$\log. \cos. 83^\circ 3' = 0,0827966 - 1. \text{ (Für den Rad. 1.)}$$

$$\text{Also } \log. [436 \cdot \cos. 83^\circ 3'] = 1,7222831 \text{ und}$$

$$436 \cdot \cos. 83^\circ 3' = 52,76. \text{ Daher wird}$$

$$\text{tang. } C = \frac{436 \cdot \sin. 83^\circ 3'}{500 - 52,76} = \frac{436 \cdot \sin. 83^\circ 3'}{447,24} \text{ und}$$

$$\log. \text{tang. } C = \log. 436 + \log. \sin. 83^\circ 3' + D. E. \log. 447,24 - 10.$$

Nun ist $\log. 436 = 2,6394865$

$\log.\sin.83^{\circ}3' = 0,9967971 - 1$ (Für den Rad. 1.)

D. E. $\log. 447,24 = 7,3494594 [-10]$; folglich

$\log. \tan. C = 0,9857430 - 1$ (Für den Rad. 1.)

$= 9,9857430$ (Für den Rad. der Tab.)

$$\begin{array}{r|l} 5956 & \text{also } C = 44^{\circ} 3' 35''. \\ \hline 1474 & \\ 60 & 2528 \\ \hline 88440 & 34,9 \end{array}$$

§. 46.

Aufgabe. (§. 37. III.) Aus drey gegebenen Seiten eines Dreyeckes die drey Winkel zu finden.

Auflösung. Man suche den Werth von $\cos. B$ aus der Gleichung

$b = \sqrt{[a^2 + c^2 - 2ac \cos. B]}$ (§. 44.), nähmlich

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos. B$ und

$\cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ d. h. den Cos. eines Winkels

erhält man, wenn man von der Summe der Quadrate der ihn einschliessenden Seiten das Quadrat der ihm gegenüberstehenden subtrahirt, und den Unterschied durch das doppelte Product der einschliessenden Seiten dividirt.

I. Zusatz. Der Analogie nach ist auch

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{und}$$

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

II. Zusatz. Ist in der Formel $\cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ der Werth b^2 so groß als $a^2 + c^2$, so wird der Zähler des Bruches, also auch $\cos. B = 0$, d. h. der Winkel $B = 90^{\circ}$ (§. 3. Zus. II.). Wird aber $b^2 > a^2 + c^2$, so wird der Werth des Bruches, also auch $\cos. B$, negativ, d. h. der Winkel B ist stumpf (§. 3. Zus. II.). Man hat in diesem Falle von dem, vermittelt der gewöhnlichen Berechnung des positiven Werthes, aus den Tabellen gefundenen Winkel das stumpfe Supplement zu nehmen.

Zahlen-Beyspiel über diese Aufgabe.

Es sey (*Fig. 12.*), im $\triangle ABC$, $a = 730'$, $b = 500'$ und $c = 600$; man suche die drey Winkel.

Auflösung. Es ist nach Obigem

$$\begin{aligned} \cos. A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ also} \\ &= \frac{250000 + 360000 - 532900}{2 \cdot 500 \cdot 600} \\ &= \frac{6100 - 5329}{6000} = \frac{771}{6000}; \text{ also} \end{aligned}$$

$$\log. \cos. A = \log. 771 - \log. 6000.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \log. 771 &= \overset{+1}{2,8870544} - 1 \\ \log. 6000 &= 3,7781513 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} \log. \cos. A = 0,1089031 - 1. & (\text{Für } r=1) \\ \log. \cos. A = 9,1089031 & (\text{Für den Rad. der Tab.}) \\ \quad 79512 & \text{und } A = 82^\circ 38' \\ \quad \hline \quad 9519 & \quad \quad \quad - 59'' \\ \quad 60 & \quad \quad \quad \hline \quad 571140 & \quad \quad \quad A = 82^\circ 37' 1'' \\ \quad 59 & \end{array}$$

Den zweyten Winkel B suche man wie gewöhnlich nach §. 38. und diesem nach den dritten durch die Subtraction der Summe der bekannten von 180° .

§. 47.

Aufgabe. Man soll aus drey gegebenen Seiten eines Dreyeckes den Sinus eines Winkels finden.

Auflösung. Nach §. 13. I. ist

$$\begin{aligned} \sin. A &= \sqrt{1 - \cos^2. A}, \text{ also auch} \\ &= \sqrt{[1 + \cos. A] [1 - \cos. A]}. \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } 1 + \cos. A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\S. 46. \text{ Z. I.})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{[b+c]^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{[b+c+a] [b+c-a]}{2bc}; \text{ ferner} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos. A &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - [b^2 + c^2 - a^2]}{2bc} \\ &= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - [b^2 - 2bc + c^2]}{2bc} \\ &= \frac{a^2 - [b-c]^2}{2bc} = \frac{[a+b-c] [a+c-b]}{2bc}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Also } \sin. A &= \sqrt{[1 + \cos. A][1 - \cos. A]} \\ &= \sqrt{\frac{[b + c + a][b + c - a][a + b - c][a + c - b]}{4 b^2 c^2}} \\ &= \sqrt{\frac{[a + b + c][b + c - a][a + c - b][a + b - c]}{2 bc}}\end{aligned}$$

I. Zusatz. Der Analogie nach ist

$$\sin. B = \frac{\sqrt{[a + b + c][b + c - a][a + c - b][a + b - c]}}{2 ac} \text{ und}$$

$$\sin. C = \frac{\sqrt{[a + b + c][b + c - a][a + c - b][a + b - c]}}{2 ab}$$

II. Zusatz. Setzt man $a + b + c = 2S$, also $S = \frac{1}{2}[a + b + c]$, so verwandelt sich obige Formel für $\sin. A$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\sin. A &= \frac{\sqrt{2S.[a + b + c - 2a][a + b + c - 2b][a + b + c - 2c]}}{2 bc} \\ &= \frac{\sqrt{2S.[2S - 2a][2S - 2b][2S - 2c]}}{2 bc} \\ &= \frac{\sqrt{2S. 2[S - a] 2[S - b] 2[S - c]}}{2 bc} \\ &= \frac{2}{bc} \sqrt{S.[S - a][S - b][S - c]},\end{aligned}$$

Mit diesem analog ist:

$$\sin. B = \frac{2}{ac} \sqrt{S.[S - a][S - b][S - c]} \text{ und}$$

$$\sin. C = \frac{2}{ab} \sqrt{S.[S - a][S - b][S - c]}.$$

Zahlen-Beyspiel über diese Aufgabe. (§.37.III.)

Im $\triangle ABC$ sey $a = 730'$, $b = 500'$ und $c = 600'$, wie groß ist A , B und C ?

Auflösung. Nach Obigem ist:

$$\sin. A = \frac{2}{bc} \sqrt{S.[S - a][S - b][S - c]}.$$

Es ist $S = \frac{1}{2}[a + b + c] = \frac{1}{2}[1830] = 915$, also

$$\sin. A = \frac{2}{300000} \sqrt{915. 185. 415. 315}.$$

$$= \frac{1}{150000} \sqrt{915. 185. 415. 315}. \text{ Mithin}$$

$$\log. \sin. A = \frac{1}{2}[\log. 915 + \log. 185 + \log. 415 + \log. 315] - \log. 150000.$$

Nun ist $\log. 915 = 2,9614211$

$\log. 185 = 2,2671717$

$\log. 415 = 2,6180481$

$\log. 315 = 2,4983106$

$\log. [915. 185. 415. 315] = 10,3449515.$

$\frac{1}{2}\log. [915. 185. 415. 315] = 5,1724757.$

$\log. 150000 = 5,1760913, \text{ also}$

$\log. \sin. A = 0,9963844 - 1 \text{ (für } r = 1)$

$= 9,9963844 \text{ (für den Rad. der Tab.)}$

$1 \text{ also } A = 82^\circ 37' 1''.$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 163 \\ 60 & 1 \\ \hline 180 & \end{array}$$

Die beyden anderen Winkel findet man wie gewöhnlich.

§. 48.

Lehrsatz. Wenn $S = \frac{1}{2} [a + b + c]$ ist, so ist für jedes Dreyeck:

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{[S-b] [S-c]}{bc}}.$$

Beweis. Nach §. 22. Zus. ist:

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos. A}{2}}, \text{ also auch}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left[1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] \right]} \quad (\S. 46. Z. I.)$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left[\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \right] \right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{4bc} [a^2 - (b-c)^2] \right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{4bc} [a+b-c] [a+c-b] \right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{4bc} [a+b+c-2c] [a+b+c-2b] \right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{4bc} [2S-2c] [2S-2b] \right]} \text{ denn es ist } a+b+c=2S,$$

$$= \sqrt{\frac{[S-c] [S-b]}{bc}}.$$

I. Zusatz. Analog mit dieser Formel ist:

$$\sin. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{[S-a] [S-c]}{ac}} \text{ und } \sin. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{[S-a] [S-b]}{ab}}.$$

II. Zusatz. Auf ähnliche Art, wie obige Formel für $\sin. \frac{1}{2} A$ entwickelt wurde, findet man auch $\cos. \frac{1}{2} A$; nämlich es ist nach §. 22. Zus.

$$\begin{aligned}\cos. \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{1 + \cos. A}{2}} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] \right]} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left[\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] \right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{4bc} [(b+c)^2 - a^2] \right]} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{4bc} [a+b+c] [b+c-a] \right]} = \sqrt{\frac{S. [S-a]}{bc}}.\end{aligned}$$

Mit dieser Formel analog ist auch:

$$\cos. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{S. [S-b]}{ac}} \text{ und } \cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{S. [S-c]}{ab}}.$$

§. 49.

Aufgabe. (§. 37. III.) Im Dreyecke ABC ist $a = 350'$, $b = 500'$ und $c = 600'$; wie groß ist A, B und C?

Auflösung. Es ist nach §. 48.

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{[S-b] [S-c]}{bc}} *).$$

Nun ist $S = \frac{1}{2}[a+b+c] = \frac{1830}{2} = 915$; also $S - b = 415$ und $S - c = 315$. Folglich

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{415 \cdot 315}{300000}}. \text{ Also}$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} [\log. 415 + \log. 315 + D. E. \log. 300000 - 10].$$

$$\text{Es ist } \log. 415 = 2,6180481$$

$$\log. 315 = 2,4983106$$

$$D. E. \log 300000 = 4,5228787 (-10)$$

$$2. \log. \sin. \frac{1}{2} A = 0,6392374 - 1 \text{ und}$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} A = \frac{1,6392374 - 2}{2}$$

$$= 0,8196187 - 1. \text{ (Für } r=1.)$$

$$= 9,8196187 \text{ (Für den Rad. der Tab.)}$$

$$\begin{array}{r|l} 5450 & \text{also } \frac{1}{2} A = 41^\circ 18' 30,7'' \\ 737 & \\ 60 & 1438 \\ \hline 44220 & 30,7 \end{array}$$

$$\text{Mithin } A = 82^\circ 37' 1''.$$

*) Diese Formel oder die für $\cos. \frac{1}{2} A$ (§. 48. Z. II.) ist die bequemste, um aus drey Seiten eines Dreyeckes einen Winkel zu finden.

Einen der beyden anderen Winkel findet man nach §. 38. und den dritten durch Subtraction der Summe der beyden bekannten von 180° .

B. Berechnung der Dreyecks-Flächen.

§. 50.

Aufgabe. Aus zwey Winkeln und einer Seite den Flächen-Inhalt des Dreyeckes zu finden.

Auflösung. (*Fig. 12.*) Es sey im $\triangle ABC$ gegeben a , B , C , also dadurch auch A .

1) Man fälle AD senkrecht auf BC , so ist

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot AD. \text{ (Geom. §. 97. Zus. II.)}$$

2) Es ist im $\triangle ABC$

$$c : a = \sin. C : \sin. A, \text{ also } c = \frac{a \cdot \sin. C}{\sin. A}$$

3) Ferner im $\triangle ABD$

$$AB : AD = 1 : \sin. B, \text{ also } AD = AB \cdot \sin. B = c \cdot \sin. B,$$

$$\text{mithin auch } AD = \frac{a \cdot \sin. B \cdot \sin. C}{\sin. A} \quad (2.)$$

$$4) \text{ Endlich } \triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot AD = \frac{a^2 \cdot \sin. B \cdot \sin. C}{2 \sin. A} \text{ (für } \sin. tot. = 1)$$

I. Zusatz. Der Analogie nach ist auch:

$$\triangle ABC = \frac{b^2 \cdot \sin. A \cdot \sin. C}{2 \sin. B} \text{ und}$$

$$\triangle ABC = \frac{c^2 \cdot \sin. A \cdot \sin. B}{2 \sin. C}.$$

II. Zusatz. Ist im $\triangle ABC$, $B = C$, so wird

$$\triangle ABC = \frac{a^2 \sin^2. B}{2 \sin. A} *).$$

Ist $A = B$, oder $A = C$, so entsteht

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin. C \text{ oder } = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin. B.$$

§. 51.

Aufgabe. Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreyeckes dessen Flächen-Inhalt zu finden.

*) oder auch, (da $\sin. A = \sin. 2B$ und $\sin. 2B = 2 \sin. B \cdot \cos. B$ ist)

$$\triangle ABC = \frac{a^2 \sin^2. B}{2 \sin. A} = \frac{a^2 \cdot \sin. B}{4 \sin. B \cdot \cos. B} = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg}. B.$$

Auflösung. (*Fig. 12.*) Es sey gegeben a, c und B .
Man fälle AD senkrecht auf BC , dann ist

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot AD, \text{ ferner aus } \triangle ABD$$

$$AB : AD = 1 : \sin. B, \text{ also}$$

$$AD = AB \sin. B = c \cdot \sin. B, \text{ mithin auch}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot AD = \frac{1}{2} ac \sin. B. \quad *)$$

Zusatz. Der Analogie nach ist auch:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin. C. \text{ und } \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin. A.$$

Anmerkung. Jede der in diesem und in dem vorhergehenden §. erwähnten Formel dient auch dazu, aus jeden drey darin vorkommenden Stücken jedes vierte Stück zu finden.

§. 52.

Aufgabe. Aus den drey gegebenen Seiten eines Dreyeckes dessen Fläche zu finden.

Auflösung. Es ist (*Fig. 12.*)

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin. A \quad (\S. 51. \text{ Zus.}), \text{ also auch}$$

$$= \frac{1}{2} bc \frac{2}{bc} \sqrt{[S.(S-a)(S-b)(S-c)]} \quad (\S. 47. \text{ Z. II.})$$

$$= \sqrt{[S.(S-a)(S-b)(S-c)]}, \text{ worin } S = \frac{1}{2}[a+b+c] \text{ ist.}$$

VI. Abschnitt.

Abgeleitete Aufgaben.

§. 53.

Aufgabe. Die Seite a eines regulären n Eckes ist gegeben, man soll dessen Flächen-Inhalt finden.

Auflösung. (*Fig. 13.*) Man ziehe vom Polygons-Mittel-Puncte an die End-Puncte einer Seite gerade Linien und fälle GH senkrecht auf ED , so ist, wenn n die Seiten-Zahl des Polygons ausdrückt,

$$Pol. = n \cdot \triangle GED = n \cdot \frac{1}{2} GH \cdot DE = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot GH.$$

$$\text{Nun ist auch } \angle EGD = \frac{360^\circ}{n}, \text{ also } \angle EGH = \frac{180^\circ}{n}. \quad \text{Ferner im}$$

*) Auch bey Berechnung dieser Formel so wie bey allen folgenden hat man mit den trigonometrischen Linien für den Radius 1 zu rechnen.

$$\triangle EGH, EH : GH = \text{tang. } EGH : 1 \text{ (§. 39.)}$$

$$\text{oder } \frac{1}{2} a : GH = \text{tang. } \frac{180^\circ}{n} : 1, \text{ also}$$

$$GH = \frac{a}{2 \text{ tang. } \frac{180^\circ}{n}} = \frac{1}{2} a \cot. \frac{180^\circ}{n} \quad (\S. 16. \text{Zus.})$$

$$\text{Daher } Pol. = \frac{1}{2} a n. GH = \frac{1}{4} a^2 n. \cot. \frac{180^\circ}{n}. *)$$

Zusatz. Mit Hülfe dieser Formel kann man auch aus dem Inhalte und aus der Seiten-Zahl eines regulären Polygons die Gröfse einer Seite finden, nämlich:

$$a = \sqrt{\frac{4. Pol.}{n. \cot. \frac{180^\circ}{n}}} = 2 \sqrt{\frac{Pol. \text{ tang. } \frac{180^\circ}{n}}{n}}.$$

§. 54.

Aufgabe. Der Radius r des um ein reguläres n Eck beschriebenen Kreises ist gegeben, man soll den Inhalt dieses Polygons finden.

Auflösung. (Fig. 13.) Wenn n die Seiten-Zahl des Polygons bedeutet und $EG = GD = r$ ist, so ist:

$$\begin{aligned} Pol. &= n. \triangle GED = n. \frac{1}{2} GE^2 \sin. EGD \text{ (§. 51. Z.)} \\ &= \frac{1}{2} nr^2 \sin. \frac{360^\circ}{n} *) \text{ indem } EGD = \frac{360^\circ}{n} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Zusatz. Sucht man aus dieser Formel den Werth von r $\left[= \sqrt{\frac{2 P}{n. \sin. \frac{360^\circ}{n}}} \right]$, so kann man aus dem Inhalte eines regulären n Eckes den Radius des darum beschriebenen Kreises finden.

§. 55.

Aufgabe. (Fig. 13.) Man soll den Flächen-Inhalt eines Kreis-Abschnitts EDJ berechnen, wenn der Radius des Kreises $EG = r$ und der Central-Winkel $EGD = \alpha$ gegeben ist.

*) Der Anfänger wolle zur Uebung für n die Zahlen 3, 4, 5, 6 etc. etc. in dieser Formel substituiren, und die dadurch entstehenden Ausdrücke vereinfachen.

Auflösung. Es ist $EDJ = EGDJ - \triangle EGD$. Nun ist $EGDJ = r^2 \pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$ (Geom. §. 100. Z. II.), ferner

$$\triangle EGD = \frac{1}{2} r^2 \sin. \alpha \text{ (§. 51. Z.)}, \text{ also}$$

$$EDJ = r^2 \pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin. \alpha = \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{\alpha^\circ \pi}{180^\circ} - \sin. \alpha \right].$$

(Diese Formel dient auch, aus der Fläche und dem Central-Winkel eines Kreis-Abschnittes den Radius des Kreises zu finden.)

§. 56.

Aufgabe. (Fig. 14.) Im Vierecke ABDC sind die beyden Diagonalen $CB = m$ und $AD = n$, dann der Winkel α , unter welchem diese sich schneiden, gegeben; man soll den Inhalt dieses Viereckes finden.

Auflösung. Man fälle von A und D auf CB die Senkrechten AF und GD, dann ist:

$$ABDC = \triangle ABC + \triangle BCD = \frac{1}{2} m \cdot AF + \frac{1}{2} m \cdot DG = \frac{1}{2} m \cdot [AF + DG].$$

Man suche nun die Werthe von AF und DG. Im $\triangle AEF$ ist $AE : AF = 1 : \sin. \alpha$, also $AF = AE \cdot \sin. \alpha$, dann im $\triangle GED$, $ED : DG = 1 : \sin. \alpha$, also $DG = ED \cdot \sin. \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Daher } ABDC &= \frac{1}{2} m [AF + DG] = \frac{1}{2} m [AE \cdot \sin. \alpha + ED \cdot \sin. \alpha] \\ &= \frac{1}{2} m \sin. \alpha [AE + ED] \\ &= \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \sin. \alpha. \end{aligned}$$

§. 57.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel (z. B. $83^\circ 14'$ mit Hülfe eines tausendtheiligen Maß-Stabes) zu construiren.

Auflösung. Man halbire den gegebenen Winkel, suche aus Vlacq's Tabellen den Sin. seiner Hälfte, verrücke das Decimal-Comma dieses Sin. um zwey Stellen von der Rechten gegen die Linke, so erhält man die Sehne des gegebenen Winkels und zwar für den Radius 500. — Es ist nämlich:

$\frac{1}{2} [83^\circ 14'] = 41^\circ 37'$, dann $\sin. 41^\circ 37' = 66414,37$; also ist die Sehne von $83^\circ 14' = 664,1437$. Man nehme nun auf dem tausendtheiligen Maß-Stabe 500', beschreibe (Fig. 2.) aus B einen Kreisbogen GF und schneide auf diesem mit

der Länge 664' eine Sehne AE ab; dann ist, wenn man AB und BE zieht, ABE der verlangte Winkel $83^{\circ} 14'$.

Beweis. Es ist gemäß §. 2. Zus. III.

$2 \sin. \frac{1}{2} [83^{\circ} 14'] = \text{Sehne } 83^{\circ} 14'$. Nun ist für den Radius der Tabellen $\sin. \frac{1}{2} [83^{\circ} 14']$ oder $\sin. 41^{\circ} 37' = 66414,37$,

also, für $r = 500$, $\sin. 41^{\circ} 37' = \frac{500.66414,37}{100000}$ (§. 28. Z. III.),

mithin $2 \sin. 41^{\circ} 37' = \frac{1000. 66414,37}{100000} = 664,1437 = \text{Sehne } 83^{\circ} 14'$. etc. etc.

§. 58.

Aufgabe. Das Maß eines gegebenen Winkels anzugeben.

Auflösung. Man beschreibe aus dem Scheitel des Winkels mit einem bestimmten Radius, z. B. 500, einen Kreis-Bogen, der seine beyden Schenkel schneidet, messe die Sehne dieses Winkels mit dem Zirkel, und untersuche ihr Maß auf dem Maß-Stabe. Das gefundene Maß halbird, gibt den Sinus des halben Winkels (§. 2. Zus. III.). Diesen Sinus verwandle man für den Radius der Tabelle (§. 28. Zus. III.), d. i. man multiplicire ihn für diesen Fall mit 200, und suche dann aus der Tabelle den entsprechenden Winkel, welcher, doppelt genommen, das Maß des gegebenen Winkels gibt. (§. 2. Zus. III.)

II.

Sphärische Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Erklärung der sphärischen Winkel und
Dreyecke.

§. 59.

Erklärung. (*Fig. 15.*) Der Neigungs-Winkel von zwey größten einander schneidenden Kreis-Flächen einer Kugel heist ein sphärischer Winkel. — Sind z. B. AB und BC Bögen der beyden größten Kugel-Kreise ABFG und CBEG, so ist ADC, d. i. der Neigungs-Winkel der Ebenen dieser Kugel-Kreise, der sphärische Winkel für die beyden Bögen AB und BC.

Zusatz. Der sphärische Winkel ADC gleicht dem Winkel aBc, welchen die Tangenten der Bögen AB und CB an ihrem Durchschnits-Puncte B bilden; denn es ist $aB \perp AD$ und $cB \perp CD$ etc.

§. 60.

Erklärung. (*Fig. 16.*) Jener Theil ABC der Oberfläche einer Kugel, welcher von den Bögen dreier größten Kugel-Kreise AB, BC und AC begrenzt wird, heist ein sphärisches Dreyeck, so wie die begrenzenden Bögen

seine Seiten. Die sphärischen Winkel für je zwey und zwey zusammenstossende Seiten dieses Dreyeckes heißen die Winkel desselben. Man bezeichnet sie gewöhnlich durch die an die Ecken des Dreyeckes gesetzten grossen Buchstaben A, B, C, so wie die diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten durch die gleichnamigen kleinen a, b, c.

I. Zusatz. Wenn auf der Oberfläche einer Kugel irgend drey grösste Kugel-Kreise sich schneiden, so kann man jedes Mahl ihre drey Durchschnitts-Puncte so annehmen, daß jede Seite des sphärischen Dreyeckes, welches sie bilden, kleiner als 180° ist. Nur von solchen sphärischen Dreyecken wird hier die Rede seyn.

II. Zusatz. Zieht man von den Winkel-Spitzen A, B, C eines sphärischen Dreyeckes nach dem Mittel-Puncte O der Kugel die Radien, so sind die Seiten dieses Dreyeckes die Masse der drey geradlinigen Winkel AOB, AOC und COB, welche den körperlichen Winkel bey O bilden.

§. 61.

Erklärung. Die Wissenschaft, allgemeine [Gleichungen (Functionen)] zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreyeckes zu finden, und mittelst derselben aus drey gegebenen Stücken eines solchen Dreyeckes die übrigen zu berechnen, heisst sphärische Trigonometrie.

II. Abschnitt.

Haupt-Eigenschaften der sphärischen Dreyecke.

§. 62.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke ist:

$$\text{I. } \cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c. \cos. A.$$

$$\text{II. } \cos. b = \cos. a. \cos. c + \sin. a. \sin. c. \cos. B.$$

$$\text{III. } \cos. c = \cos. a. \cos. b + \sin. a. \sin. b. \cos. C.$$

Beweis. (Fig. 16.) Es sey $AD = \text{tang. } AB = \text{tang. } c$, also $OD = \text{sec. } c$; ferner $AE = \text{tang. } b$ und $OE = \text{sec. } b$; dann die Radien der Kugel $AO = OC = OB = 1$ und $DE = x$.

Im $\triangle ADE$ ist nach §. 44.

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cdot \cos. DAE, \text{ oder}$$

$$x^2 = \text{tang}^2. b + \text{tang}^2. c - 2 \text{ tang. } b \cdot \text{tang. } c \cdot \cos. A.$$

Im $\triangle ODE$ ist eben so

$$DE^2 = OE^2 + OD^2 - 2OE \cdot OD \cdot \cos. EOD, \text{ oder}$$

$$x^2 = \sec^2. b + \sec^2. c - 2 \sec. b \cdot \sec. c \cdot \cos. a.$$

Subtrahirt man obige Gleichung von dieser, so ist:

$$0 = \sec^2. b - \text{tang}^2. b + \sec^2. c - \text{tang}^2. c - 2 \sec. b \sec. c \cos. a + 2 \text{ tang. } b \cdot \text{tang. } c \cos. A.$$

und, da überhaupt $\sec^2. m - \text{tang}^2. m = r^2 = 1$ ist,

$$0 = 2 + 2 \text{ tang. } b \cdot \text{tang. } c \cos. A - 2 \sec. b \sec. c \cos. a, \text{ oder}$$

$$0 = 1 + \frac{\sin. b \cdot \sin. c}{\cos. b \cdot \cos. c} \cos. A - \frac{\cos. a}{\cos. b \cdot \cos. c}, \text{ woraus}$$

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A. \text{ (Th. I.)}$$

Dieser Formel analog ist die Th. II. und III. *)

I. Zusatz. Ist im sphärischen Dreyecke $A = 90^\circ$, so ist $\cos. A = 0$, folglich $\cos. a = \cos. b \cos. c$. (I.) Eben so für $B = 90^\circ$ ist $\cos. b = \cos. a \cos. c$. (II.) und für $C = 90^\circ$, auch $\cos. c = \cos. a \cos. b$ (III.), d. h. in jedem rechtwinklig-sphärischen Dreyecke ist der $\cos.$ der Hypotenuse dem Producte aus den heyden $\cos.$ der Katheten gleich.

II. Zusatz. Aus den Formeln I., II. und III. folgt:

$$\text{IV. } \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

$$\text{V. } \cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c} \text{ und}$$

$$\text{VI. } \cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\sin. a \sin. b}.$$

§. 63.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinuse der Winkel wie die Sinuse der ihnen gegenüberstehenden Seiten, d. i.

$$\sin. C : \sin. B = \sin. c : \sin. b.$$

Beweis. Es sey (Fig. 16.) ABC das sphärische Dreyeck, O der Mittelpunkt der Kugel und AO, CO und BO = 1 Radien derselben. Man fälle von A auf die Ebene BOC die Senk-

*) Diese so wie die folgenden Formeln der sphärischen Trigonometrie gelten für den Radius oder $\sin. tot. = 1$.

rechte ΔF , ebenso in der Ebene BOC von F auf OB und OC die Perpendikel FG und FH, und ziehe endlich AG und AH; so ist $AGF = B$, $AHF = C$ (§. 59), dann $AG = \sin. c$ und $AH = \sin. b$.

Im ΔAFH ist, für $\sin. tot. = 1$,

$$AH : AF = 1 : \sin. C, \text{ also } AF = AH. \sin. C;$$

ebenso im ΔAFG :

$$AG : AF = 1 : \sin. B, \text{ also } AF = AG. \sin. B.$$

$$\begin{aligned} \text{Daher } AH. \sin. C &= AG. \sin. B, \text{ oder} \\ \sin. b. \sin. C &= \sin. c. \sin. B \text{ und} \\ \sin. C : \sin. B &= \sin. c : \sin. b. \end{aligned}$$

Hiermit analog ist auch:

$$\begin{aligned} \sin. A : \sin. B &= \sin. a : \sin. b \text{ und} \\ \sin. A : \sin. C &= \sin. a : \sin. c. \end{aligned}$$

§. 64.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke ist:

- I. $\cos. A = -\cos. B. \cos. C + \sin. B. \sin. C. \cos. a.$
- II. $\cos. B = -\cos. A. \cos. C + \sin. A. \sin. C. \cos. b.$
- III. $\cos. C = -\cos. A. \cos. B + \sin. A. \sin. B. \cos. c.$

Beweis, Man substituirt in die Gleichung I. des §. 62. anstatt $\cos. c$ seinen Werth aus III. des §. 62., so ist:

$$\begin{aligned} \cos. a &= \sin. b. \sin. c. \cos. A + \cos. a. \cos^2. b + \sin. a. \sin. b. \cos. b. \cos. C. \\ &= \sin. b. \sin. c. \cos. A + \cos. a. [1 - \sin^2. b] + \sin. a. \sin. b. \cos. b. \cos. C. \end{aligned}$$

$$\text{IV. } 0 = \sin. c. \cos. A - \cos. a. \sin. b + \sin. a. \cos. b. \cos. C; \text{ und}$$

$$\text{da } \sin. a : \sin. c = \sin. A : \sin. C, \text{ also } \sin. c = \frac{\sin. a. \sin. C}{\sin. A},$$

$$0 = \cot. A. \sin. C - \cot. a. \sin. b + \cos. b. \cos. C, \text{ oder}$$

$$\text{V. } \cot. A. \sin. C + \cos. b. \cos. C = \cot. a. \sin. b;$$

$$\text{ferner, da } \sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B, \text{ also } \sin. b = \frac{\sin. B. \sin. a}{\sin. A} \text{ ist,}$$

$$\text{VI. } \cos. A. \sin. C = \cos. a. \sin. B - \sin. A. \cos. C. \cos. b.$$

Mit dieser Gleichung analog ist auch

$$\cos. B. \sin. C = \cos. b. \sin. A - \sin. B. \cos. C. \cos. a.$$

Schaffet man aus diesen beyden letzten Gleichungen den Werth $\cos. b$ weg, indem man letztere mit $\cos. C$ multiplicirt und dann beyde addirt, so entsteht, wenn man anstatt $\cos^2. C$ ebenfalls $1 - \sin^2. C$ setzt, dann alle Glieder mit $\sin. C$ dividirt:

$$\cos. A = -\cos. B. \cos. C + \sin. B. \sin. C. \cos. a.$$

Mit dieser Gleichung analog folgt II. und III.

Zusatz. Aus I., II. und III. folgt:

$$\text{VII. } \cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B. \cos. C}{\sin. B. \sin. C.}$$

$$\text{VIII. } \cos. b = \frac{\cos. B + \cos. A. \cos. C}{\sin. A. \sin. C} \quad \text{und}$$

$$\text{IX. } \cos. c = \frac{\cos. C + \cos. A. \cos. B}{\sin. A. \sin. B}.$$

§. 65.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke ist:

$$\text{I. } \sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. [S-b]. \sin. [S-c]}{\sin. b. \sin. c.}}, \text{ worin } S = \frac{1}{2} [a+b+c] \text{ ist.}$$

Beweis. Es ist nach der Formel IV. des §. 62. Z. II.

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c.}, \quad \text{also}$$

$$1 - \cos. A = 1 - \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c.} \quad \text{oder}$$

$$2 \sin^2. \frac{1}{2} A = \frac{\sin. b. \sin. c + \cos. b. \cos. c - \cos. a}{\sin. b. \sin. c.} \quad (\S. 22. \text{ Z.})$$

$$= \frac{\cos. [b-c] - \cos. a}{\sin. b. \sin. c.} \quad (\S. 20. \text{ XI.})$$

$$= \frac{2 \sin. \frac{1}{2} [a+b-c] \sin. \frac{1}{2} [a+c-b]}{\sin. b. \sin. c.} \quad (\S. 26. \text{ XXIX.})$$

$$\text{also } \sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} [a+b-c]. \sin. \frac{1}{2} [a+c-b]}{\sin. b. \sin. c.}}$$

und, wenn man $\frac{1}{2} [a+b+c] = S$, also $a+b+c = 2S$ setzt,

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. [S-c]. \sin. [S-b]}{\sin. b. \sin. c.}}$$

Mit dieser Formel analog ist:

$$\text{II. } \sin. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. [S-a]. \sin. [S-c]}{\sin. a. \sin. c.}} \quad \text{und}$$

$$\text{III. } \sin. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin. [S-a]. \sin. [S-b]}{\sin. a. \sin. b.}},$$

Zusatz. Durch eine ähnliche Reduction, wenn man wie oben statt $1 - \cos. A$ den Ausdruck $1 + \cos. A$ herstellt, erhält man (nach §. 22. Z.)

$$\cos. \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin. S. \sin. [S-a]}{\sin. b. \sin. c}}, \text{ und durch Analogie}$$

$$\cos. \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin. S. \sin. [S-b]}{\sin. a. \sin. c}} \text{ und}$$

$$\cos. \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin. S. \sin. [S-c]}{\sin. a. \sin. b.}}.$$

§. 66.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke ist:

$$\text{I. } \sin. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos. P. \cos. [P-A]}{\sin. B. \sin. C}}, \text{ wenn } P = \frac{1}{2}[A+B+C] \text{ ist.}$$

Beweis. Dieser Beweis ist ganz ähnlich mit dem des §. 65., nämlich es ist nach §. 64. Zus.

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B. \cos. C}{\sin. B. \sin. C} \text{ oder}$$

$$1 - \cos. a = 1 - \frac{\cos. A + \cos. B. \cos. C}{\sin. B. \sin. C} \text{ oder}$$

$$2\sin^2. \frac{1}{2}a = \frac{\sin. B. \sin. C - \cos. B. \cos. C - \cos. A}{\sin. B. \sin. C} \quad (\S. 22. \text{Zus.})$$

$$= \frac{-\cos. [B+C] - \cos. A}{\sin. B. \sin. C} \quad (\S. 19. \text{IX.})$$

$$= -\frac{2\cos. \frac{1}{2}[A+B+C]. \cos. \frac{1}{2}[B+C-A]}{\sin. B. \sin. C} \quad (\S. 26. \text{XXVII})$$

Also, wenn man $\frac{1}{2}[A+B+C] = P$ setzt,

$$\sin. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos. P. \cos. [P-A]}{\sin. B. \sin. C}}.$$

Mit dieser Formel analog ist:

$$\text{II. } \sin. \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos. P. \cos. [P-B]}{\sin. A. \sin. C}} \text{ und}$$

$$\text{III. } \sin. \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos. P. \cos. [P-C]}{\sin. A. \sin. B}}.$$

Zusatz. Durch eine ähnliche Reduction wie oben erhält man, wenn man anstatt $1 - \cos. a$ den Ausdruck $1 + \cos. a$ herstellt,

$$\cos. \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos. [P-B]. \cos. [P-C]}{\sin. B. \sin. C}}$$

$$\cos. \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos. [P-A]. \cos. [P-C]}{\sin. A. \sin. C}} \text{ und}$$

$$\cos. \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos. [P-A]. \cos. [P-B]}{\sin. A. \sin. B}}.$$

§. 67.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke ist:

$$\text{I. } \operatorname{tang.} \frac{1}{2} [A+B] = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2} [a-b]}{\cos. \frac{1}{2} [a+b]} \quad \text{und}$$

$$\text{II. } \operatorname{tang.} \frac{1}{2} [A-B] = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\sin. \frac{1}{2} [a-b]}{\sin. \frac{1}{2} [a+b]}.$$

Beweis. Aus der Gleichung IV. des §. 64., oder wenn man aus I. und III. des §. 62. $\cos. c$ wegschafft, ist:
 $\cos. A. \sin. c = \cos. a. \sin. b - \sin. a. \cos. b. \cos. C$, und damit analog
 $\cos. B. \sin. c = \cos. b. \sin. a - \sin. b. \cos. a. \cos. C$, mithin

$$\begin{aligned} [\cos. A + \cos. B] \sin. c &= \cos. a. \sin. b + \cos. b. \sin. a - [\sin. a. \cos. b \\ &\quad + \cos. a. \sin. b] \cos. C. \\ &= [\cos. a. \sin. b + \sin. a. \cos. b] [1 - \cos. C] \\ &= \sin. [a+b] [1 - \cos. C]. \quad \alpha) \end{aligned}$$

Nun ist nach §. 63. $\sin. a : \sin. c = \sin. A : \sin. C$
 und $\sin. b : \sin. c = \sin. B : \sin. C$, also auch
 $\sin. c. \sin. A = \sin. a. \sin. C$ und $\sin. c. \sin. B = \sin. b. \sin. C$ } addirt und subtrahirt man
 beyde Gleichungen, so ist:

$$\begin{aligned} [\sin. A + \sin. B] \sin. c &= [\sin. a + \sin. b] \sin. C \quad \text{und} \\ [\sin. A - \sin. B] \sin. c &= [\sin. a - \sin. b] \sin. C. \end{aligned}$$

Dividirt man jede dieser beyden Gleichungen durch die Gleichung α), so folgt:

$$\frac{\sin. A + \sin. B}{\cos. A + \cos. B} = \frac{\sin. C}{1 - \cos. C} \cdot \frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. [a+b]} \quad \text{und} \quad \beta)$$

$$\frac{\sin. A - \sin. B}{\cos. A + \cos. B} = \frac{\sin. C}{1 - \cos. C} \cdot \frac{\sin. a - \sin. b}{\sin. [a+b]} \quad \gamma)$$

Nun ist $\frac{\sin. A + \sin. B}{\cos. A + \cos. B} = \operatorname{tang.} \frac{1}{2} [A+B]$ (§. 26. XXXII), dann

$$\frac{\sin. C}{1 - \cos. C} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} C. \cos. \frac{1}{2} C}{2 \sin^2 \frac{1}{2} C} = \cot. \frac{1}{2} C \quad (\S. 21. XII. \text{ und } \S. 22. Z.)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. [a+b]} &= \frac{2 \sin. \frac{1}{2} [a+b]. \cos. \frac{1}{2} [a-b]}{2 \sin. \frac{1}{2} [a+b]. \cos. \frac{1}{2} [a+b]} \quad (\S. 26. XXVI. \text{ u. } \S. 21. XII) \\ &= \frac{\cos. \frac{1}{2} [a-b]}{\cos. \frac{1}{2} [a+b]}. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Art ist auch:

$$\frac{\sin. A - \sin. B}{\cos. A + \cos. B} = \operatorname{tang.} \frac{1}{2} [A-B] \quad (\S. 26. XXXIV.) \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin. a - \sin. b}{\sin. [a+b]} = \frac{\sin. \frac{1}{2}[a-b]}{\sin. \frac{1}{2}[a+b]} \quad (\S. 26. XXVIII. \text{ und } \S. 21. XII.)$$

Substituirt man diese gefundenen Werthe in β und γ , so entsteht daraus:

$$\begin{aligned} \text{tang.} \frac{1}{2}[A+B] &= \cot. \frac{1}{2}C \frac{\cos. \frac{1}{2}[a-b]}{\cos. \frac{1}{2}[a+b]} \quad \text{und} \\ \text{tang.} \frac{1}{2}[A-B] &= \cot. \frac{1}{2}C \frac{\sin. \frac{1}{2}[a-b]}{\sin. \frac{1}{2}[a+b]}. \end{aligned}$$

Durch Analogie ergeben sich aus diesen beyden Formeln ähnliche für $\text{tang.} \frac{1}{2}[A+C]$ und $\text{tang.} \frac{1}{2}[A-C]$, dann für $\text{tang.} \frac{1}{2}[B+C]$ und $\text{tang.} \frac{1}{2}[B-C]$ etc. etc.

Aus den Gleichungen I. und II. folgt:

$$\begin{aligned} \cot. \frac{1}{2}C &= \text{tang.} \frac{1}{2}[A+B] \frac{\cos. \frac{1}{2}[a+b]}{\cos. \frac{1}{2}[a-b]} \quad \text{und} \\ \cot. \frac{1}{2}C &= \text{tang.} \frac{1}{2}[A-B] \frac{\sin. \frac{1}{2}[a+b]}{\sin. \frac{1}{2}[a-b]}. \end{aligned}$$

§. 68.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreyecke ist:

$$\text{I. } \text{tang.} \frac{1}{2}[a+b] = \text{tang.} \frac{1}{2}c \frac{\cos. \frac{1}{2}[A-B]}{\cos. \frac{1}{2}[A+B]} \quad \text{und}$$

$$\text{II. } \text{tang.} \frac{1}{2}[a-b] = \text{tang.} \frac{1}{2}c \frac{\sin. \frac{1}{2}[A-B]}{\sin. \frac{1}{2}[A+B]}.$$

Beweis. Dieser ist ganz ähnlich mit dem vorigen. — Es ist nähmlich analog mit der Formel VI. des §. 64.

$$\cos. A. \sin. B = \cos. a. \sin. C - \sin. A. \cos. B. \cos. c, \text{ also}$$

*) $\cos. a. \sin. C = \cos. A. \sin. B + \sin. A. \cos. B. \cos. c$, u. damit analog

$$\cos. b. \sin. C = \cos. B. \sin. A + \sin. B. \cos. A. \cos. c, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \cos. a + \cos. b] \sin. C &= \cos. A. \sin. B + \cos. B. \sin. A + [\sin. A. \cos. B \\ &\quad + \cos. A. \sin. B] \cos. c. \\ &= [\cos. A. \sin. B + \cos. B. \sin. A] [1 + \cos. c] \\ &= \sin. [A+B] [1 + \cos. c]. \end{aligned} \quad \alpha)$$

Da nach §. 63. $\sin. a : \sin. A = \sin. c : \sin. C$ und

$\sin. b : \sin. B = \sin. c : \sin. C$ ist, so folgt auch:

$\sin. a. \sin. C = \sin. A. \sin. c$ und $\left. \begin{array}{l} \sin. a. \sin. C = \sin. A. \sin. c \\ \sin. b. \sin. C = \sin. B. \sin. c \end{array} \right\}$ addirt und und subtr. man beyde Gleichungen, so folgt:

$$\begin{aligned} [\sin. a + \sin. b] \sin. C &= [\sin. A + \sin. B] \sin. c \quad \text{und} \\ [\sin. a - \sin. b] \sin. C &= [\sin. A - \sin. B] \sin. c. \end{aligned}$$

*) Diese Formel erhält man auch aus I. und III. §. 64; wenn man $\cos. C$ eliminirt.

Dividirt man jede dieser beyden Gleichungen durch die Gleichung α), so folgt:

$$\frac{\sin.a + \sin.b}{\cos.a + \cos.b} = \frac{\sin.c}{1 + \cos.c} \cdot \frac{\sin.A + \sin.B}{\sin.[A+B]} \quad \text{und} \quad \beta)$$

$$\frac{\sin.a - \sin.b}{\cos.a + \cos.b} = \frac{\sin.c}{1 + \cos.c} \cdot \frac{\sin.A - \sin.B}{\sin.[A+B]} \quad \gamma)$$

Nun ist, wie im vorigen Beweise:

$$\frac{\sin.a + \sin.b}{\cos.a + \cos.b} = \text{tang. } \frac{1}{2}[a+b] \quad (\S. 26. \text{XXXII.})$$

$$\frac{\sin.c}{1 + \cos.c} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}c \cdot \cos.\frac{1}{2}c}{2\cos.^2.\frac{1}{2}c} = \text{tang. } \frac{1}{2}c \quad (\S. 21. \text{XII. u. } \S. 22. \text{Z.})$$

$$\frac{\sin.A + \sin.B}{\sin.[A+B]} = \frac{\cos.\frac{1}{2}[A-B]}{\cos.\frac{1}{2}[A+B]} \quad (\S. 26. \text{XXVI. und } \S. 21. \text{XII.})$$

Eben so auch $\frac{\sin.a - \sin.b}{\cos.a + \cos.b} = \text{tang. } \frac{1}{2}[a-b] \quad (\S. 26. \text{XXXIV.})$

$$\frac{\sin.A - \sin.B}{\sin.[A+B]} = \frac{\sin.\frac{1}{2}[A-B]}{\sin.\frac{1}{2}[A+B]} \quad (\S. 26. \text{XXVIII. und } \S. 21. \text{XII.})$$

Substituirt man diese gefundenen Werthe in β und γ , so folgt:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[a+b] = \text{tang. } \frac{1}{2}c \frac{\cos.\frac{1}{2}[A-B]}{\cos.\frac{1}{2}[A+B]} \quad \text{und}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[a-b] = \text{tang. } \frac{1}{2}c \frac{\sin.\frac{1}{2}[A-B]}{\sin.\frac{1}{2}[A+B]}.$$

Durch Analogie ergeben sich aus diesen beyden Formeln ähnliche für $\text{tang. } \frac{1}{2}[a+c]$ und $\text{tang. } \frac{1}{2}[a-c]$, dann für $\text{tang. } \frac{1}{2}[b+c]$ und $\text{tang. } \frac{1}{2}[b-c]$ etc. etc.

Zusatz. Aus den Gleichungen I. und II. folgt:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}c = \text{tang. } \frac{1}{2}[a+b] \frac{\cos.\frac{1}{2}[A+B]}{\cos.\frac{1}{2}[A-B]} \quad \text{und}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}c = \text{tang. } \frac{1}{2}[a-b] \frac{\sin.\frac{1}{2}[A+B]}{\sin.\frac{1}{2}[A-B]}.$$

III. Abschnitt.

Berechnung der Dreyecke.

A. Berechnung der Seiten und Winkel.

§. 69.

Erklärung. Die sphärische Trigonometrie, als Wissenschaft aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyeckes die übrigen zu finden, hat folgende Aufgaben zu lösen:

1) Aus den drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes die drey Winkel,

2) aus zwey Seiten und einem von ihnen nicht eingeschlossenen Winkel die beyden anderen Winkel und die dritte Seite,

3) aus zwey Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel die beyden fehlenden Winkel und die dritte Seite,

4) aus einer Seite und den beyden daranliegenden Winkeln die zwey anderen Seiten und den dritten Winkel,

5) aus einer Seite und zwey Winkeln, wovon einer dieser Seite gegenübersteht, die zwey übrigen Seiten und den dritten Winkel, und endlich

6) aus den drey Winkeln die drey Seiten zu finden.

a. Rechtwinklig-sphärische Dreyecke.

§. 70.

Aufgabe. In einem, bey A rechtwinkligen, sphärischen Dreyecke ABC ist gegeben: b und c; man suche a, C und B.

Auflösung. 1) Nach §. 62. Z. I. ist $\cos. a = \cos. b. \cos. c.$

2) Analog mit der Formel V. §. 64. ist:

$\cot. C. \sin. A + \cos. b. \cos. A = \cot. c. \sin. b,$ also für $A = 90^\circ.$

$\cot. C = \cot. c \sin. b$ oder $\tan. C = \frac{\tan. c}{\sin. b}$; hiermit analog

$$3) \cot. B = \cot. b \sin. c \text{ oder } \tan. B = \frac{\tan. b}{\sin. c} *).$$

§. 71.

Aufgabe. Im sphärischen Dreyecke ABC sey $A = 90^\circ$, dann a und b gegeben; man suche c , B und C .

Auflösung. 1) Nach §. 62. Z. I. ist $\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b}$.

2) Da nach §. 63., für $\sin. tot. = 1$,

$$\sin. a : \sin. b = 1 : \sin. B \text{ ist, so folgt } \sin. B = \frac{\sin. b}{\sin. a}.$$

In dieser Formel wird $B \leq 90^\circ$, wenn $b \leq 90^\circ$ ist, denn es ist nach §. 64. II.

$\cos. B = -\cos. A \cos. C + \sin. A \sin. C \cos. b$; also, für $A = 90^\circ$, $\cos. B = \sin. C \cos. b$, d. h. B und b sind in einem, bey A rechtwinkligen, sphärischen Dreyecke immer gleichartig (d. i. entweder beyde spitz oder beyde stumpf), denn, wenn b spitz oder stumpf ist, so muß auch B spitz oder stumpf seyn, weil $\sin. C$ stets $+$ bleibt, und sich der positive oder negative Werth von $\cos. B$ nach jenem von $\cos. b$ richtet.

3) Aus V. §. 64. ist, für $A = 90^\circ$, $\cos. C = \cot. a \tan. b$.

§. 72.

Aufgabe. Im sphärischen Dreyecke ABC ist gegeben: $A = 90^\circ$, dann a und C ; man suche b , c , B .

Auflösung. 1) Aus V. §. 64. ist, für $A = 90^\circ$, $\tan. b = \tan. a \cos. C$.

2) Es ist $\sin. a : \sin. c = 1 : \sin. C$, also $\sin. c = \sin. a \sin. C$.

Auch hier ist $c \leq 90^\circ$, wenn $C \leq 90^\circ$ ist (wie in §. 71. 2.).

3) Aus I. §. 64. ist, für $A = 90^\circ$, $\cot. B = \cos. a \tan. C$.

§. 73.

Aufgabe. Im sphärischen Dreyecke ABC sey $A = 90^\circ$, dann b und B gegeben; gesucht werde a , c , C .

*) Dieselbe Formel erhält man auch aus V. §. 64., wenn man darin C und c mit A und a , dann C und c mit B und b gegenseitig verwechselt und endlich $A = 90^\circ$ setzt.

Auflösung. 1) Es ist $\sin. a : \sin. b = 1 : \sin. B$,
also $\sin. a = \frac{\sin. b}{\sin. B}$.

$$2) \sin. c = \frac{\tan. b}{\tan. B} \quad (\S. 70. 3.)$$

$$3) \text{ Nach II. } \S. 64. \text{ für } A = 90^\circ \text{ folgt } \sin. C = \frac{\cos. B}{\cos. b}.$$

Da dem Sinus eines Winkels sowohl ein spitzer Winkel als auch dessen stumpfes Supplement entspricht, so ist diese Aufgabe unbestimmt. Man kann also in einem rechtwinklig-sphärischen Dreyecke, wovon eine Kathete und der ihr gegenüber stehende Winkel gegeben ist, die übrigen Stücke nicht bestimmt finden, wenn nicht für einen practischen Fall bekannt ist, ob das zu suchende Stück größer oder kleiner als 90° werden muß.

§. 74.

Aufgabe. Im sphärischen Dreyecke ABC ist gegeben: $A = 90^\circ$, b und C ; man suche c , a und B .

Auflösung. 1) Es ist $\tan. c = \tan. C. \sin. b$. (§. 70. 2.)

$$2) \tan. a = \frac{\tan. b}{\cos. C} \quad (\S. 71. 3. \text{ od. aus V. } \S. 64. \text{ für } A = 90^\circ).$$

$$3) \cos. B = \sin. C. \cos. b. \quad (\text{Aus II. } \S. 64. \text{ für } A = 90^\circ).$$

§. 75.

Aufgabe. Im sphärischen Dreyecke ABC ist gegeben: $A = 90^\circ$, dann B und C ; man suche a , b , c .

Auflösung. Aus I., II., III., §. 64. (oder aus VII., VIII., IX. §. 64. Z.), für $A = 90^\circ$, folgt:

$$1) \cos. a = \cot. B. \cot. C. \quad 2) \cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. C} \text{ u. } 3) \cos. c = \frac{\cos. C}{\sin. B}.$$

§. 76.

a. Aus obigen sechs Aufgaben für die rechtwinklig-sphärischen Dreyecke lassen sich folgende Haupt-Gleichungen abstrahiren [für $A = 90^\circ$]:

$$1) \cos. a = \cos. b. \cos. c \quad (\S. 70. 1. \text{ und } \S. 71. 1.).$$

$$2) \tan. c = \tan. C. \sin. b. \quad (\S. 70. 2. \text{ und } 3., \S. 73. 2. \text{ und } \S. 74. 1.).$$

3) $\sin. b = \sin. a. \sin. B.$ (§. 71. 2., §. 72. 2., §. 73. 1.).

4) $\text{tang. } b = \text{tang. } a. \cos. C.$ (§. 71. 3., §. 72. 1., §. 74. 2.).

5) $\cot. B = \cos. a. \text{tang. } C.$ (§. 72. 3., §. 75. 1.).

6) $\cos. B = \cos. b. \sin. C.$ (§. 73. 3., §. 74. 3., §. 75. 2. u. 3.).

b. Rücksichtlich der Auffindung der Gleichungen für die einzelnen Stücke ist zu bemerken:

1) Dafs der Zus. I. des §. 62. dann §. 63. und die Formeln I. und V. des §. 64. die allgemeinen Haupt-Gleichungen zur Auflösung dieser Dreyecke enthalten.

2) Wenn in der zu suchenden Gleichung die drey Seiten des sphärischen Dreyeckes vorkommen sollen, so dient zur Auflösung, im Falle $A = 90^\circ$ ist, die Formel $\cos. a = \cos. b. \cos. c.$ (§. 62. Z. I.)

3) Sollen in der zu suchenden Gleichung zwey Seiten und ein Winkel (ausser $A = 90^\circ$) vorkommen, so kann man jedes Mahl entweder den Lehrsatz §. 63. oder die Formel V. des §. 64. (oder ihre Analogien) zur Auflösung benützen.

4) Soll aber die zu suchende Gleichung (ausser $A = 90^\circ$) zwey Winkel und eine Seite enthalten, so dient zur Auffindung derselben jedes Mahl die Formel I. §. 64. oder ihre Analogien *).

(Die am Ende beygefügte Ite Formel-Tabelle enthält die Zusammenstellung aller Fälle, wenn $A = 90^\circ$ ist.)

b. Schiefwinklig-sphärische Dreyecke, oder sphärische Dreyecke im Allgemeinen.

§. 77.

Aufgabe. (§. 69. 1.) In einem sphärischen Dreyecke ABC sey $a = 50^\circ$, $b = 70^\circ$ und $c = 100^\circ$; man suche A, B und C.

Auflösung. Nach §. 65. Zus. II. ist

$$\cos. \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin. S. \sin. [S-a]}{\sin. b. \sin. c}}.$$

Da $S = \frac{1}{2}[a+b+c] = 110^\circ$ ist, so folgt:

*) Man drücke die in 1) bis 4) angeführten Formeln und Sätze durch Worte aus.

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. 110^\circ \cdot \sin. 60^\circ}{\sin. 70^\circ \cdot \sin. 100^\circ}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin. 60^\circ}{\sin. 100^\circ}} \text{ also:}$$

$$\log. \cos. \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} [\log. \sin. 60^\circ - \log. \sin. 100^\circ].$$

Nun ist $\log. \sin. 60^\circ = 0,9375306 - 1$ *)

$$\log. \sin. 100^\circ = 0,9933515 - 1$$

$$2 \log. \cos. \frac{1}{2} A = 0,9441791 - 1$$

$$\log. \cos. \frac{1}{2} A = 0,9720895 - 1, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2} A = 20^\circ 19' 19,5'' \text{ und } A = 40^\circ 38' 39''.$$

Durch ähnliche Berechnung der Formeln des §. 65. Z. II. erhält man $B = 53^\circ 2' 8''$ und $C = 123^\circ 8' 11''$.

§. 78.

Aufgabe. (§. 69. 2.) In einem sphärischen Dreyecke ABC ist gegeben a, b und A ; man suche B, c und C .

Auflösung. 1) Es ist nach §. 63.:

$$\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B, \text{ also } \sin. B = \frac{\sin. b \cdot \sin. A}{\sin. a}.$$

2) Da jeder Sinus, wenn dessen Winkel nicht 90° ist, sowohl zu einem spitzen Winkel, als zu dessen Supplement gehört; so ergibt sich für den Winkel B ein doppelter Werth, und die Auflösung ist zweydeutig. Es ist nähmlich unbestimmt, ob B spitz oder stumpf zu nehmen ist.

Diese Zweydeutigkeit wird jedoch durch folgende in der Aufgabe bestimmten Umstände beschränkt. Nämlich:

der gesuchte Winkel B ist spitz zu nehmen,

- 1) wenn $A < 90^\circ$ und $a > b$ ist, indem in jedem sphärischen Dreyecke der kleineren Seite auch ein kleinerer Winkel gegenüberstehen muß **).

*) Da alle sphärisch-trigonometrischen Formeln für den Radius 1 construirt sind, so rechnet man mit den trigon. Linien für den Radius 1.

**) Dafs auch in jedem sphärischen Dreyecke der grösseren Seite ein grösserer Winkel gegenüberstehe, läßt sich bey diesen Dreyecken auf der Kugel-Oberfläche analog mit den geradlinigen in einer Ebene eben so beweisen, wie die §§. 18., 26. und 28. (Geom.) angeben.

2) wenn $A > 90^\circ$, $b < 90^\circ$ und $a < [180^\circ - b]$ ist.

Der gesuchte Winkel B ist stumpf zu nehmen,

1) wenn $A > 90^\circ$ und $a < b$ ist,

2) wenn $A < 90^\circ$, $b > 90^\circ$ und $a > [180^\circ - b]$ ist.

Folgendes mag der Grund dieser angeführten Merkmale seyn.

$$\text{Nach §. 66. I. ist } \tan \frac{1}{2} [A+B] = \frac{\cot \frac{1}{2} C \cdot \cos \frac{1}{2} [a-b]}{\cos \frac{1}{2} [a+b]}$$

In dieser Formel müssen die beyden Factoren $\cot \frac{1}{2} C$ und $\cos \frac{1}{2} [a-b]$ offenbar positiv seyn, da $\frac{1}{2} C$ und $\frac{1}{2} [a-b]$ kleiner als 90° sind (§. 60. Zus. I.), folglich die beyden anderen Größen $\tan \frac{1}{2} [A+B]$ und $\cos \frac{1}{2} [a+b]$ in der Gleichung einerley Zeichen haben, d. i. entweder beyde positiv oder beyde negativ seyn. Es müssen daher auch die Winkel $\frac{1}{2} [A+B]$ und $\frac{1}{2} [a+b]$ gleichartig, d. i. entweder beyde spitz oder beyde stumpf seyn. Nach Obigem heist es: B wird spitz, 2) wenn $A > 90^\circ$, $b < 90^\circ$ und $a < [180^\circ - b]$ ist; denn, dann ist $a+b < 180^\circ$, also auch

$$\frac{1}{2} [a+b] < 90^\circ, \text{ und damit gleichartig auch}$$

$$\frac{1}{2} [A+B] < 90^\circ, \text{ also auch } A+B < 180^\circ.$$

$$\text{Nun ist } \frac{A > 90^\circ, \text{ also auch}}{B < 90^\circ}.$$

Eben so heist es oben: der Winkel B wird stumpf, 2) wenn $A < 90^\circ$, $b > 90^\circ$ und $a > [180^\circ - b]$ ist. Denn aus Letzterem folgt $a+b > 180^\circ$, also auch

$$\frac{1}{2} [a+b] > 90^\circ, \text{ und damit gleichartig auch}$$

$$\frac{1}{2} [A+B] > 90^\circ, \text{ oder}$$

$$A+B > 180^\circ.$$

$$\text{Nun ist } A < 90^\circ, \text{ also muß}$$

$$\frac{B > 90^\circ.}{}$$

In anderen als oben angeführten Umständen bleibt die Anflösung unbestimmt; es kann nämlich B unter der Bedingung der Aufgabe spitz oder stumpf seyn, d. i. es gibt zwey verschiedene sphärische Dreyecke, welche dieselben Stücke a, b und A gemein haben. Man muß also aus anderen Umständen erfahren, ob für einen practischen Fall das Dreyeck bey B spitz- oder stumpfwinklig ist.

3) Kennt man B bestimmt, so ist mit dessen Hülfe durch die Formel $\text{tang. } \frac{1}{2} c = \text{tang. } \frac{1}{2} [a-b] \frac{\sin. \frac{1}{2} [A+B]}{\sin. \frac{1}{2} [A-B]}$ (§. 68. Z.) die Seite c leicht zu finden, so wie nach $\text{cot. } \frac{1}{2} C = \text{tang. } \frac{1}{2} [A-B] \frac{\sin. \frac{1}{2} [a+b]}{\sin. \frac{1}{2} [a-b]}$ (§. 67. Zus.) der Winkel C.

§. 79.

Aufgabe. (§. 69. 3.) Im sphärischen Dreyecke ABC ist $a = 50^\circ$, $b = 70^\circ$ und $C = 123^\circ 8' 11''$. Wie groß ist A, B und c?

Auflösung. 1) Nach §. 67. I. und II. kann man die halbe Summe und die halbe Differenz der beyden unbekannten Winkel, also auch diese selbst finden. Nämlich es ist:

$$\begin{aligned} \text{tang. } \frac{1}{2} [B+A] &= \text{cot. } \frac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2} [b-a]}{\cos. \frac{1}{2} [b+a]} \quad (\S. 67. I.) \\ &= \text{cot. } 61^\circ 34' 5,5'' \frac{\cos. 10^\circ}{\cos. 60^\circ}, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\log. \text{tg. } \frac{1}{2} [B+A] = \log. \text{cot. } 61^\circ 34' 5,5'' + \log. \cos. 10^\circ - \log. \cos. 60^\circ.$$

$$\text{Nun ist } \log. \text{cot. } 61^\circ 34' 5,5'' = 0,7335307 - 1$$

$$\log. \cos. 10^\circ = 0,9933515 - 1$$

$$+ 0,7268822 - 1$$

$$- \log. \cos. 60^\circ = -0,6989700 + 1, \text{ also}$$

$$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} [B+A] = 0,0279122 - 1 \text{ und}$$

$$\frac{1}{2} [B+A] = 46^\circ 50' 23,7''.$$

Eben so ist nach §. 67. II.

$$\text{tang. } \frac{1}{2} [B-A] = \text{cot. } \frac{1}{2} C \frac{\sin. \frac{1}{2} [b-a]}{\sin. \frac{1}{2} [b+a]} = \text{cot. } 61^\circ 34' 5,5'' \frac{\sin. 10^\circ}{\sin. 60^\circ},$$

$$\text{also } \log. \text{tang. } \frac{1}{2} [B-A] = \log. \text{cot. } 61^\circ 34' 5,5'' + \log. \sin. 10^\circ - \log. \sin. 60^\circ.$$

$$\text{Nun ist } \log. \text{cot. } 61^\circ 34' 5,5'' = 0,7335307 - 1$$

$$\log. \sin. 10^\circ = 0,2396702 - 1$$

$$+ 0,9732009 - 2$$

$$- \log. \sin. 60^\circ = -0,9375306 + 1, \text{ also}$$

$$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} [B-A] = 0,0356703 - 1 \text{ und}$$

$$\frac{1}{2} [B-A] = 6^\circ 11' 44,8''.$$

$$\text{Nun ist } \frac{1}{2} [B+A] = 46^\circ 50' 23,7'' \text{ und}$$

$$\frac{1}{2} [B-A] = 6^\circ 11' 44,8'' \text{ mithin}$$

$$B = 53^\circ 2' 8'' \text{ und } A = 40^\circ 38' 39'',$$

2) $c = 100^\circ$ findet man nach der Formel

$$\text{tang. } \frac{1}{2} c = \text{tang. } \frac{1}{2} [b - a] \frac{\sin. \frac{1}{2} [B + A]}{\sin. \frac{1}{2} [B - A]} \quad (\S. 68. Z.).$$

3) Um c unmittelbar aus den gegebenen Stücken der Aufgabe zu finden, nehme man

$$\cos. c = \cos. a. \cos. b + \sin. a. \sin. b. \cos. C. \quad (\S. 62. III.)$$

Da aber diese Formel für logarithmische Berechnung unbequem ist, setze man $\text{tang. } \varphi = \cos. C. \text{ tang. } b$, woraus

$$\cos. C = \frac{\text{tang. } \varphi}{\text{tang. } b} = \frac{\sin. \varphi. \cos. b}{\cos. \varphi. \sin. b} \text{ ist, daher}$$

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos. a. \cos. b + \frac{\sin. a. \sin. b. \sin. \varphi. \cos. b}{\cos. \varphi. \sin. b} \\ &= \cos. b \frac{\cos. a. \cos. \varphi + \sin. a. \sin. \varphi}{\cos. \varphi} = \frac{\cos. b}{\cos. \varphi} \cos. [a - \varphi], \end{aligned}$$

woraus man, nach Berechnung des Hülfswinkels φ aus $\text{tang. } \varphi = \cos. C. \text{ tang. } b$, c leicht finden kann.

§. 80.

Aufgabe. (§. 69. 4.) Im sphärischen Dreyecke ABC ist $A = 46^\circ 38' 39''$, $B = 53^\circ 2' 8''$ und $c = 100^\circ$; wie groß ist a , b und C ?

Auflösung. 1) Nach §. 68. I. und II. kann man die halbe Summe und die halbe Differenz der beyden unbekannten Seiten, also auch diese selbst finden, nämlich es

$$\begin{aligned} \text{ist } \text{tang } \frac{1}{2} [b + a] &= \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\cos. \frac{1}{2} [B - A]}{\cos. \frac{1}{2} [B + A]} \quad (\S. 68. I.) \\ &= \text{tg. } 50^\circ \frac{\cos. 6^\circ 11' 44,5''}{\cos. 46^\circ 50' 23,5''}. \end{aligned}$$

$$\text{Es ist } \log. \text{tang. } 50^\circ = 0,0761865$$

$$\log. \cos. 6^\circ 11' 44,5'' = 0,9974558 - 1$$

$$+ 0,0736423$$

$$\underline{\log. \cos. 46^\circ 50' 23,5'' = 0,8350814 - 1, \text{ also}}$$

$$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} [b + a] = 0,2385619 \text{ und}$$

$$\frac{1}{2} [b + a] = 60^\circ. \text{ Ferner ist:}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} [b - a] = \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\sin. \frac{1}{2} [B - A]}{\sin. \frac{1}{2} [B + A]} \quad (\S. 68. II.)$$

$$= \text{tang. } 50^\circ \frac{\sin. 6^\circ 11' 44,5''}{\sin. 46^\circ 50' 23,5''}.$$

Nun ist $\log. \tan. 50^\circ = 0,0761865$

$\log. \sin. 6^\circ 11' 44,5'' = 0,0331203 - 1$

$+ 0,1093063 - 1$

$\log. \sin. 46^\circ 50' 23,5'' = 0,8629923 - 1$, also

$\log. \tan. \frac{1}{2} [b - a] = 0,2463145 - 1$ und

$\frac{1}{2} [b - a] = 10^\circ$.

Da nun $\frac{1}{2} [b + a] = 60^\circ$ und

$\frac{1}{2} [b - a] = 10^\circ$ ist, so folgt

$b = 70^\circ$ und $a = 50^\circ$.

2) Den Winkel $C = 123^\circ 8' 11''$ findet man nach

$$\cot. \frac{1}{2} C = \tan. \frac{1}{2} [B - A] \frac{\sin. \frac{1}{2} [b + a]}{\sin. \frac{1}{2} [b - a]} \quad (\S. 67. Z.).$$

3) Will man den Winkel C unmittelbar aus den gegebenen Stücken finden, so nehme man

$$\cos. C = \sin. A. \sin. B. \cos. c. - \cos. A. \cos. B. \quad (\S. 64. III.).$$

Zur leichtern Berechnung dieser Formel setze man

$$\cot. \varphi = \cos. c. \tan. B, \text{ woraus } \cos. c = \frac{\cot. \varphi}{\tan. B} = \frac{\cos. B. \cos \varphi}{\sin. B. \sin. \varphi}$$

ist; dies in obige Formel substituirt, gibt:

$$\begin{aligned} \cos. C &= \sin. A. \sin. B \frac{\cos. B. \cos. \varphi}{\sin. B. \sin. \varphi} - \cos. A. \cos. B. \\ &= \cos. B \frac{\sin. A. \cos. \varphi - \cos. A. \sin. \varphi}{\sin. \varphi} = \frac{\cos. B}{\sin. \varphi} \sin. [A - \varphi]; \end{aligned}$$

woraus sich, nach Berechnung des Hülfswinkels φ aus $\cot. \varphi = \cos. c. \tan. B$, der Winkel C ergibt.

§. 81.

Aufgabe. (§. 69. 5.) Im sphärischen Dreyecke ABC ist a , A und B gegeben; man soll die übrigen Stücke b , C und c finden.

Auflösung. 1) Es ist:

$$\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b, \text{ also } \sin. b = \frac{\sin. a. \sin. B}{\sin. A}.$$

2) Da auch in dieser Aufgabe, wie §. 78. stets zwey Werthe für b sich ergeben, so ist die Auflösung dieser Aufgabe zweydeutig; denn es kann die Seite b spitz oder stumpf seyn. Diese Zweydeutigkeit wird jedoch auch hier durch folgende Merkmale der Aufgabe beschränkt.

Die zu suchende Seite b wird spitz oder $< 90^\circ$,

1) wenn $a < 90^\circ$ und $A > B$ ist, denn im sphärischen Dreyecke steht dem kleineren Winkel auch die kleinere Seite gegenüber;

2) wenn $B < 90^\circ$, $a > 90^\circ$ und $A < [180^\circ - B]$ ist.

Die zu suchende Seite b wird stumpf oder $> 90^\circ$,

1) wenn $a > 90^\circ$ und $A < B$ ist;

2) wenn $B > 90^\circ$, $a < 90^\circ$ und $A > [180^\circ - B]$ ist.

Der Beweis für das so eben angeführte wird auf ähnliche Art wie §. 78. durch dieselbe Formel geführt. — Es ist nämlich durch diesen Beweis §. 78. bekannt, daß $\frac{1}{2}[a+b]$ stets gleichartig mit $\frac{1}{2}[A+B]$ seyn müsse; ist nun, wie oben angezeigt,

$B < 90^\circ$, $a > 90^\circ$ und $A < [180^\circ - B]$, so ist daraus $A+B < 180^\circ$, folglich auch

$\frac{1}{2}[A+B] < 90^\circ$ und damit gleichartig
auch $\frac{1}{2}[a+b] < 90^\circ$ oder $a+b < 180^\circ$.

Nun ist $a > 90^\circ$, also
muß dann $b < 90^\circ$ d. i. spitz seyn.

Eben so, wenn, wie oben bemerkt wurde,

$B > 90^\circ$, $a < 90^\circ$ und $A > [180^\circ - B]$ ist, folgt daraus $A+B > 180^\circ$, also auch $\frac{1}{2}[A+B] > 90^\circ$, also damit gleichartig auch $\frac{1}{2}[a+b] > 90^\circ$ oder
 $a+b > 180^\circ$

Nun ist $a < 90^\circ$, also muß auch hier offenbar
 $b > 90^\circ$, d. i. stumpf werden.

In anderen als diesen so eben angeführten Merkmalen bleibt die Auflösung auch hier unbestimmt, d. i. es gibt zwey sphärische Dreyecke, welche dieselben Stücke a , A und B gemein haben, wovon das eine die Seite b spitz das andere stumpf hat. Ob also hier für einen gegebenen Fall b spitz oder stumpf zu nehmen ist, muß sich aus andern Umständen ergeben.

3) Ist jedoch die Seite b einmahl gefunden, so kann daraus c und C durch die Formeln

$$\text{tang. } \frac{1}{2}c = \text{tang. } \frac{1}{2}[a-b] \frac{\sin. \frac{1}{2}[A+B]}{\sin. \frac{1}{2}[A-B]} \quad (\S. 68. Z.)$$

$\cot. \frac{1}{2} C = \tan. \frac{1}{2} [A - B] \frac{\sin. \frac{1}{2} [a + b]}{\sin. \frac{1}{2} [a - b]}$ (§. 67. Z.) leicht gefunden werden.

§. 82.

Aufgabe. (§. 69. 6.) Im sphärischen Dreyecke ABC ist $A = 40^\circ 38' 30''$, $B = 53^\circ 2' 8''$ und $C = 123^\circ 8' 11''$; man soll die drey Seiten finden.

Auflösung. Nach §. 66. I. ist

$$\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos. P. \cos. [P - A]}{\sin. B. \sin. C}}, \text{ worin}$$

$$P = \frac{1}{2} [A + B + C] = 180^\circ 24' 20''; \text{ daher}$$

$$\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos. 108^\circ 24' 20''. \cos. 67^\circ 45' 51''}{\sin. 53^\circ 2' 8''. \sin. 123^\circ 8' 11''}} \text{ und}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos. 71^\circ 35' 31''. \cos. 67^\circ 45' 51''}{\sin. 53^\circ 2' 8''. \sin. 123^\circ 8' 11''}}. \text{ Diesem}$$

$$\text{nach ist } \log. \sin. \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} [\log. \cos. 71^\circ 35' 31'' + \lg. \cos. 67^\circ 45' 51'' - (\lg. \sin. 53^\circ 2' 8'' + \lg. \sin. 123^\circ 8' 11'')].$$

$$\text{Es ist } \log. \cos. 71^\circ 35' 31'' = 0,4093880 - 1$$

$$\log. \cos. 67^\circ 45' 51'' = 0,5779741 - 1$$

$$+ 0,0773621 - 1$$

$$\log. \sin. 53^\circ 2' 8'' = 0,9025516 - 1$$

$$\log. \sin. 123^\circ 8' 11'' = 0,9229183 - 1$$

$$+ 0,8254609 - 1, \text{ folglich}$$

$$2. \sin. \frac{1}{2} a = 0,2518022 - 1$$

$$\sin. \frac{1}{2} a = 0,6259461 - 1, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2} a = 25^\circ \text{ und } a = 50^\circ.$$

Auf ähnliche Art findet man durch II. und III. des §. 66. $b = 70^\circ$ und $c = 100^\circ$.

(Die am Ende beygefügte IIte Tabelle enthält eine Uebersicht über die Auflösung der schiefwinklig sphärischen Dreyecke.)

B. Berechnung des Flächen-Inhaltes sphärischer Dreyecke.

§. 83.

Aufgabe. Die Länge eines in Graden ausgedrückten Kreis-Bogens in Theilen des Halbmessers und umgekehrt zu finden.

Auflösung. 1) Soll eine Bogenlänge von φ° in Theilen des Halbmessers r verwandelt werden, so setze man

$$360^\circ : 2r\pi = \varphi^\circ : 2r\pi \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} \text{ (Geom. §. 94.)}$$

also ist die Bogen-Länge von $\varphi^\circ = 2r\pi \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = r\pi \frac{\varphi^\circ}{180^\circ}$.

Ist z. B. $\varphi = 3^\circ$ und $r = 1$, so ist:

$$\text{Bogen von } 3^\circ = \pi \frac{3}{180} = \frac{\pi}{60}, \text{ also}$$

$$\log. \pi = 0,4971499 \text{ *)}$$

$$\log. 60 = 1,7781513$$

$$\log. \text{Bog. } 3^\circ = 0,7189986 - 2 \text{ und}$$

$$\text{Bog. } 3^\circ = 0,0523598 \dots$$

2) Soll der Radius r in einen Bogen verwandelt d. i. das Grad-Maß eines Bogens angegeben werden, dessen Länge $= r$ ist, so setze man

$$2r\pi : 360^\circ = r : \frac{180^\circ}{\pi}, \text{ also dieses Gradmaß} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ oder}$$

$$= \frac{180. 60. 60}{\pi} \text{ Secunden.}$$

$$\text{Nun ist } \log. 180. 60. 60 = 5,8115750$$

$$\log. \pi = 0,4971499, \text{ also}$$

$$\log. \frac{180.60.60}{\pi} = 5,3144251, \text{ und das Grad-}$$

$$\text{Maß für den Radius selbst} = 206264,8''$$

$$= 57^\circ 17' 44,8'' \text{ d. h. die Län-}$$

ge des Halbmessers eines Kreises gleicht einer Bogenlänge von $57^\circ 17' 44,8''$ dieses Kreises.

Anmerkung. In Vega's Logarithmen-Tabellen befindet sich eine eigene Tafel für obige Reductionen.

§. 84.

Lehrsatz. Der Flächen-Inhalt eines sphärischen Dreyeckes gleicht dem Producte aus dem Radius der Kugel in das Längen-Maß eines größten Kreis Bogens, dessen Grad-Maß der Ueberschuß der Summe der drey Winkel des Dreyeckes über 180° ist; d. i. wenn M den Inhalt und r den Radius der Kugel ausdrückt:

$$\text{Thes. } M = r [A + B + C - 180^\circ].$$

Beweis. (Fig. 17.) Es sey ABC das sphärische Dreyeck. Man verlängere auf der Oberfläche der Kugel jede

*) Da $\pi = 3,14159265 \dots$ ist.

Seite des Dreyeckes, so, daß die drey größten Kugel-Kreise ACFE, ABFD und BCDE entstehen. Es ist dann:

$$DEB = 180^\circ = EBC$$

$$-EB = -EB \text{ also}$$

$$DE = BC, \text{ ferner eben so}$$

$$AE = FC \text{ und}$$

$$AD = BF, \text{ mithin}$$

$\triangle AED \cong \triangle BFC$, indem auch die Winkel dieser beyden Dreyecke gleich sind.

Nun setze man $\triangle ABC = M$, $\triangle AEB = n$, $\triangle ADC = p$ und $\triangle ADE = \triangle BFC = q$.

Das $\triangle ABC$ und $\triangle AEB$ oder M und n bilden zusammen die krumme Oberfläche eines keilförmigen Kugel-Ausschnittes, welchen die beyden Ebenen ACFE und BCDE unter dem Neigungs-Winkel C abschneiden; folglich ist, wenn K die ganze Kugel-Oberfläche ausdrückt,

$$M + n = K \cdot \frac{C}{360^\circ} \text{ (Geom. §. 131. Z. V.), eben so}$$

$$\text{auch } M + p = K \cdot \frac{B}{360^\circ} (\dots) \text{ und}$$

$$M + q = K \cdot \frac{A}{360^\circ} (\dots); \text{ folglich}$$

$$3M + q + p + n = K \cdot \frac{B + B + C}{360^\circ}. \text{ Nun ist,}$$

$$M + q + p + n = \frac{1}{2} K \text{ (halbe Kugel-Fläche), also}$$

$$2M = K \cdot \frac{A + B + C}{360^\circ} - \frac{1}{2} K \text{ und}$$

$$M = K \cdot \frac{A + B + C - 180^\circ}{2 \cdot 360^\circ}.$$

Es ist aber $K = 4r^2\pi = 2r \cdot 2r\pi = 2r \cdot 360^\circ$, wenn man 360° im Längen-Maße des Radius r ausdrückt. Daher

$$M = \frac{2r \cdot 360^\circ}{2 \cdot 360^\circ} [A + B + C - 180^\circ] = r [A + B + C - 180^\circ].$$

I. Zusatz. Aus $M = K \cdot \frac{A + B + C - 180^\circ}{2 \cdot 360^\circ}$, indem $K = 4r^2\pi$

ist, wird auch $M = r^2\pi \frac{A + B + C - 180^\circ}{180^\circ}$, wobey kein Bo-

gen auf das Längen-Maß des Radius r verwandelt werden darf.

II. Zusatz. Aus $M = K \frac{A+B+C-180^\circ}{2 \cdot 360^\circ}$ ergibt sich auch

$$M : K = A + B + C - 180^\circ : 720^\circ, \text{ d. i.}$$

die Fläche eines sphärischen Dreyeckes verhält sich zur ganzen Oberfläche der Kugel, wie der Ueberschuß der Summe der drey sphärischen Winkel des Dreyeckes über 180° zu 720° .

III. Zusatz. Will man den Flächen-Inhalt eines sphärischen Dreyeckes nach der Formel $M = r [A+B+C-180^\circ]$ im quadratischen Grad-Maße berechnen (wie man es bey Erd-Vermessungen häufig findet), so muß anstatt r der Winkel $57^\circ 17' 44,8''$ (§. 83. 2.) gesetzt werden.

§. 85.

Aufgabe. Auf einer Kugel, deren Radius $r = 9'$ ist, findet sich ein sphärisches Dreyeck mit den Winkeln $A = 64^\circ 19'$, $B = 43^\circ 17'$ und $C = 77^\circ 28'$; man soll dessen Flächen-Inhalt finden.

Auflösung. Nach §. 84. Zus. I. ist:

$$M = r^2 \pi \frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ}, \text{ also}$$

$$= 81 \pi \frac{5^\circ 4'}{180^\circ} = 81 \pi \frac{304}{10800}.$$

$$\text{Es ist } \log. 81 = 1,9084850$$

$$\log. \pi = 0,4971499$$

$$\log. 304 = 2,4828736$$

$$D. E. \log. 10800 = 5,0665762 \text{ } (-10), \text{ daher}$$

$$\log. M = 0,8550847 \text{ und}$$

$$M = 7,162832 \square'$$

$$= 7 \square' 16 \square'' 28 \square''' 32 \square''''.$$

I. Zusatz. 1) Ist in der Aufgabe ein Winkel des Dreyeckes z. B. $A = 90^\circ$, so wird

$$M = r^2 \pi \frac{B+C-90^\circ}{180^\circ}.$$

2) Ist $A = B = 90^\circ$, so wird $M = r^2 \pi \frac{C}{180^\circ}$;

3) endlich für $A = B = C = 90^\circ$ folgt $M = \frac{r^2 \pi}{2}$

dem achten Theile der ganzen Kugel-Oberfläche gleich.

II. Zusatz. Ist ein sphärisches Dreyeck überhaupt durch drey Stücke bestimmt (wie §. 69. 1. 2. 3. 4. 5.); so suche man daraus die drey Winkel desselben, und verfare bey der Berechnung der Dreyecks-Fläche wie oben.

§. 86.

Aufgabe. Auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius r ist, befindet sich ein sphärisches n Eck. Man soll aus den n Winkeln dieses Vieleckes dessen Flächen-Inhalt M finden.

Auflösung. Man zerlege das n Eck durch Diagonal-Bogen größter Kreise in sphärische Dreyecke. Es ergeben sich deren stets $n - 2$. Der Ueberschufs aller Polygons-Winkel über $(n - 2) 180^\circ$ muß offenbar derselbe seyn als die Ueberschüsse der Winkel eines jeden Dreyeckes über 180° zusammengenommen. Ist die Summe der Polygons-Winkel S , so ist der gesammte Ueberschufs

$$D = S - [n - 2] 180^\circ, \text{ mithin } M = r^2 \pi \frac{S - [n - 2] 180^\circ}{180^\circ}$$

(§. 84. Zus. I.).

Jeder Winkel des n Eckes gibt mit seinem sphärischen Nebenwinkel zusammen 180° ; ist nun die Summe aller dieser Nebenwinkel s , so ist $S + s = n. 180^\circ$, woraus $S = n. 180^\circ - s$, folglich der Inhalt

$$M = r^2 \pi \frac{n. 180^\circ - s - [n - 2] 180^\circ}{180^\circ} = r^2 \pi \frac{360^\circ - s}{180^\circ}.$$

IV. Abschnitt.

Reduction sphärischer Dreyecke auf die dazu gehörigen Sehnen-Dreyecke.

§. 87.

Aufgabe. Die Seiten eines sphärischen Dreyeckes seyen a, b, c , die correspondirenden Seiten des Sehnen-Dreyeckes, welches entsteht, wenn man die Endpuncte der Bogen (Seiten) durch gerade Linien verbindet, α, β, γ ; man soll aus den ersteren letztere finden.

Auflösung. Der Radius der Kugel sey r . Es ist dann die Sehne α für diesen Radius der doppelte Sinus des halben Bogens a , d. i. $\frac{1}{2} \alpha = r \sin. \frac{1}{2} a$ (den $\sin. tot. = 1$ genommen); daher $\alpha = 2r \sin. \frac{1}{2} a$, und eben so $\beta = 2r \sin. \frac{1}{2} b$, dann $\gamma = 2r \sin. \frac{1}{2} c$.

Zusatz. Soll man aus α, β, γ die Seiten des sphärischen Dreyeckes a, b, c finden, so folgt aus Obigem:

$$\sin. \frac{1}{2} a = \frac{\alpha}{2r}, \sin. \frac{1}{2} b = \frac{\beta}{2r} \text{ und } \sin. \frac{1}{2} c = \frac{\gamma}{2r}.$$

§. 88.

Aufgabe. Man soll aus den Seiten α, β, γ des Sehnen-Dreyeckes die correspondirenden Winkel A, B, C des sphärischen finden.

Auflösung. Man suche zuerst aus α, β, γ die Seiten a, b, c des sphärischen Dreyeckes (§. 87. Zus.) und aus diesen die Winkel A, B, C (§. 77.).

Zusatz. Soll man aus den Seiten a, b, c des sphärischen Dreyeckes die Winkel $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des Sehnen-Dreyeckes finden, so suche man zuerst aus a, b, c die Seiten α, β, γ des Sehnen-Dreyeckes (§. 87.) und daraus die Winkel $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ (§. 48.).

§. 89.

Aufgabe. Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreyeckes den diesem Winkel

correspondirenden Sehnen-Winkel d. i. aus b, c, A den Winkel $\mathcal{A}$ zu finden.

Auflösung. Der Radius der Kugel sey $= 1$. Es ist $\cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c. \cos. A$ (§. 62.) also auch

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} a &= \sin. b. \sin. c. \cos. A + [1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} b] [1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} c] \\ &= \sin. b. \sin. c. \cos. A + 1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} b - 2 \sin^2. \frac{1}{2} c + \\ &\quad 4 \sin^2. \frac{1}{2} b. \sin^2. \frac{1}{2} c. \\ 2 \sin^2. \frac{1}{2} b + 2 \sin^2. \frac{1}{2} c - 2 \sin^2. \frac{1}{2} a &= \sin. b. \sin. c. \cos. A + \\ &\quad 4 \sin^2. \frac{1}{2} b. \sin^2. \frac{1}{2} c. \text{ I.)} \end{aligned}$$

Im Sehnen-Dreyecke ist:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2 \beta. \gamma. \cos. \mathcal{A} \text{ (§. 44.) oder} \\ 4 \sin^2. \frac{1}{2} a &= 4 \sin^2. \frac{1}{2} b + 4 \sin^2. \frac{1}{2} c - 8 \sin. \frac{1}{2} b. \sin. \frac{1}{2} c. \cos. \mathcal{A}. \text{ (§. 87.)} \\ 2 \sin^2. \frac{1}{2} a &= 2 \sin^2. \frac{1}{2} b + 2 \sin^2. \frac{1}{2} c - 4 \sin. \frac{1}{2} b. \sin. \frac{1}{2} c. \cos. \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Diese Formel mit I. verglichen, gibt:

$$\begin{aligned} \sin. b. \sin. c. \cos. A + 4 \sin^2. \frac{1}{2} b. \sin^2. \frac{1}{2} c &= 4 \sin. \frac{1}{2} b. \sin. \frac{1}{2} c. \cos. \mathcal{A}. \\ \text{Nun ist } \sin. b. \sin. c &= 4 \sin. \frac{1}{2} b. \cos. \frac{1}{2} b. \sin. \frac{1}{2} c. \cos. \frac{1}{2} c. \text{ (§. 21. XII.)} \\ \text{also } \cos. \frac{1}{2} b. \cos. \frac{1}{2} c. \cos. A + \sin. \frac{1}{2} b. \sin. \frac{1}{2} c &= \cos. \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Zusatz. Für den Fall, daß $c = b$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} \cos. \mathcal{A} &= \cos^2. \frac{1}{2} b. \cos. A + \sin^2. \frac{1}{2} b, \text{ oder} \\ 1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} \mathcal{A} &= \cos^2. \frac{1}{2} b [1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} A] + 1 - \cos^2. \frac{1}{2} b, \text{ woraus} \\ \sin. \frac{1}{2} \mathcal{A} &= \cos. \frac{1}{2} b. \sin. \frac{1}{2} A. \end{aligned}$$

§. 90.

Aufgabe. Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Sehnen-Dreyeckes den, diesem Winkel correspondirenden sphärischen Winkel oder aus $\beta, \gamma, \mathcal{A}$ den Winkel A zu finden.

Auflösung. Für den Kugel-Radius 1 ist $\sin. \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \alpha$ (§. 87.)

also $1 - \cos. a = 2. \frac{1}{4} \alpha^2$ und $\cos. a = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$, eben so auch $\cos. b = 1 - \frac{1}{2} \beta^2$ und $\cos. c = 1 - \frac{1}{2} \gamma^2$. Es ist ferner:

$$\begin{aligned} \sin. b &= \sqrt{1 - \cos^2. b} = \sqrt{[1 - (1 - \frac{1}{2} \beta^2)^2]} = \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{4} \beta^4} = \\ &\quad \beta \sqrt{1 - \frac{1}{4} \beta^2} = \frac{1}{2} \beta \sqrt{4 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Eben so auch $\sin. c = \frac{1}{2} \gamma \sqrt{4 - \gamma^2}$.

Substituirt man nun diese Werthe in

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c.} \text{ (§. 62. Z. II.), so wird nach ge-}$$

höriger Reduction $\cos. A = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha^2 - \beta^2 \gamma^2}{\beta \cdot \gamma \cdot \sqrt{(4-\beta^2)(4-\gamma^2)}}$.

In diese Gleichung substituirt man für α^2 den Werth aus $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \cos. \mathcal{A}$, so wird endlich

$$\cos. A = \frac{4\cos. \mathcal{A} - \beta \cdot \gamma}{\sqrt{[(4-\beta^2)(4-\gamma^2)]}} = \frac{\cos. \mathcal{A} - \frac{1}{2}\beta \cdot \frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{[(1+\frac{1}{2}\beta)(1-\frac{1}{2}\beta)(1+\frac{1}{2}\gamma)(1-\frac{1}{2}\gamma)]}}.$$

Zusatz. Ist $\gamma = \beta$, so wird $\cos. A = \frac{4\cos. \mathcal{A} - \beta^2}{4 - \beta^2}$

also auch $1 - \cos. A = 2\sin^2. \frac{1}{2}A = 1 - \frac{4\cos. \mathcal{A} - \beta^2}{4 - \beta^2} = \frac{4(1 - \cos. \mathcal{A})}{4 - \beta^2}$

und $\sin. \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{4\sin^2. \frac{1}{2}\mathcal{A}}{4 - \beta^2}} = \frac{2\sin. \frac{1}{2}\mathcal{A}}{\sqrt{[(2+\beta)(2-\beta)]}} = \frac{\sin. \frac{1}{2}\mathcal{A}}{\sqrt{[(1+\frac{1}{2}\beta)(1-\frac{1}{2}\beta)]}}.$

I. Formel-Tabelle für rechtwinklig-sphärische Dreyecke.

Fall	Ausser $A=90^\circ$ ist gegeben	Gesucht wird	Formel	Bemerkungen.
1	b, c.	B a C	$\cot. B = \cot. b. \sin. c.$ $\cot. C = \cot. c. \sin. b.$ $\cos. a = \cos. b. \cos. c.$	(§. 70.)
2	a, b.	B c C	$\sin. B = \frac{\sin. b}{\sin. a}.$ $\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b}.$ $\cos. C = \cot. a. \tan. b.$	$B \angle 90^\circ$ wenn $b \angle 90^\circ$ (§. 71.)
3	a, c.	C b B	$\sin. C = \frac{\sin. c}{\sin. a}.$ $\cos. b = \frac{\cos. a}{\cos. c}.$ $\cos. B = \cot. a. \tan. c.$	$C \angle 90^\circ$ wenn $c \angle 90^\circ$ (§. 71.)
4	a, C.	c B b	$\sin. c = \sin. a. \sin. C.$ $\cot. B = \cos. a. \tan. C.$ $\tan. b = \cos. C. \tan. a.$	$c \angle 90^\circ$ wenn $C \angle 90^\circ$ (§. 72.)
5	a, B.	b C c	$\sin. b = \sin. a. \sin. B.$ $\cot. C = \cos. a. \tan. B.$ $\tan. c = \cos. B. \tan. a.$	$b \angle 90^\circ$ wenn $B \angle 90^\circ$ (§. 72.)
6	b, B.	a C c	$\sin. a = \frac{\sin. b}{\sin. B}.$ $\sin. C = \frac{\cos. B}{\cos. b}.$ $\sin. c = \tan. b. \cot. B.$	(§. 73.) } unbestimmt.
7	c, C.	a B b	$\sin. a = \frac{\sin. c}{\sin. C}.$ $\sin. B = \frac{\cos. C}{\cos. c}.$ $\sin. b = \tan. c. \cot. C.$	
8	b, C.	a c B	$\cot. a = \cos. C. \cot. b.$ $\tan. c = \tan. C. \sin. b.$ $\cos. B = \sin. C. \cos. b.$	(§. 74.)
9	B, c.	a b C	$\cot. a = \cos. B. \cot. c.$ $\tan. b = \tan. B. \sin. c.$ $\cos. C = \sin. B. \cos. c.$	(§. 74.)
10	B, C.	a b c	$\cos. a = \cot. B. \cot. C.$ $\cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. C}.$ $\cos. c = \frac{\cos. C}{\sin. B}.$	(§. 75.)

Fall	Gegeben ist	Gesucht wird	Formel	Bemerkungen
1	a b c	A	$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. S. \sin. [S-a]}{\sin. b. \sin. c}}$	$S = \frac{1}{2} [a+b+c]$ §. 65. Z.
2	a b A	B c C	$\sin. B = \frac{\sin. b. \sin. A}{\sin. a}$ (§. 63.) $\lg. \frac{1}{2} c = \lg. \frac{1}{2} [a-b] \frac{\sin. \frac{1}{2} [A+B]}{\sin. \frac{1}{2} [A-B]}$ $\cot. \frac{1}{2} C = \lg. \frac{1}{2} [A-B] \frac{\sin. \frac{1}{2} [a+b]}{\sin. \frac{1}{2} [a-b]}$	$B \nless 90^\circ$, {1) wenn $A \nless 90^\circ$, $a \nless b$ {2) „ $A \nless 90^\circ$, $b \nless 90^\circ$, $a \nless 180^\circ - b$. übrigens unbestimmt. (§. 68. Z.) (§. 67. Z.)
3	a b C	A B c	$\lg. \frac{1}{2} [A+B] = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2} [a-b]}{\cos. \frac{1}{2} [a+b]}$ $\lg. \frac{1}{2} [A-B] = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\sin. \frac{1}{2} [a+b]}{\sin. \frac{1}{2} [a-b]}$ $\lg. \frac{1}{2} c = \lg. \frac{1}{2} [a-b] \frac{\sin. \frac{1}{2} [A+B]}{\sin. \frac{1}{2} [A-B]}$	oder $\cos. c = \frac{\cos. b}{\cos. \varphi} \cos. [a-\varphi]$, wenn $\lg. \varphi = \cos. C. \lg. b$ ist. (§. 79. 3.)
4	A B c	a b C	$\lg. \frac{1}{2} [a+b] = \lg. \frac{1}{2} c \frac{\cos. \frac{1}{2} [A-B]}{\cos. \frac{1}{2} [A+B]}$ $\lg. \frac{1}{2} [a-b] = \lg. \frac{1}{2} c \frac{\sin. \frac{1}{2} [A+B]}{\sin. \frac{1}{2} [A-B]}$ $\cot. \frac{1}{2} C = \lg. \frac{1}{2} [A-B] \frac{\sin. \frac{1}{2} [a+b]}{\sin. \frac{1}{2} [a-b]}$	§. 68. I. und II. oder $\cos. C = \frac{\cos. B}{\sin. \varphi} \sin. [A-\varphi]$ wenn $\cot. \varphi = \cos. c. \lg. B$ ist. (§. 80. 3.)
5	a A B	b C c	$\sin. b = \frac{\sin. a. \sin. B}{\sin. A}$ (§. 63.) $\cot. \frac{1}{2} C = \lg. \frac{1}{2} [A-B] \frac{\sin. \frac{1}{2} [a+b]}{\sin. \frac{1}{2} [a-b]}$ $\lg. \frac{1}{2} c = \lg. \frac{1}{2} [a-b] \frac{\sin. \frac{1}{2} [A+B]}{\sin. \frac{1}{2} [A-B]}$	$b \nless 90^\circ$ {1) wenn $a \nless 90^\circ$, $A \nless B$ {2) „ $a \nless 90^\circ$, $B \nless 90^\circ$, $A \nless 180^\circ - B$. übrigens unbestimmt.
6	A B C	a	$\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos. P. \cos. [P-A]}{\sin. B. \sin. C}}$	$P = \frac{1}{2} [A+B+C]$ §. 66.

Trigonometrische Aufgaben.

Allgemeine Vorbegriffe.

§. 91.

1) Eine Ebene, worauf die Richtung der Schwere *) senkrecht steht, heißt Horizontal-Ebene und jede in dieser gezogene Linie Horizontal-Linie. Eine Ebene, die in der Richtung der Schwere liegt, heißt eine Vertical-Ebene.

2) (*Fig. 18.*) Gesetzt $ABCDE$ seyen verschiedene höher oder tiefer liegende Punkte im Raume; fällt man von diesen auf eine Horizontal-Ebene MN die Senkrechten Aa , Bb , Cc , dd und Ee , so heißen

a) die Punkte a , b , c , d , e die auf den Horizont reducirten Punkte A , B , C , D , E oder die Projectionen derselben;

b) die Senkrechten Aa , Bb , Cc , Dd , Ee die Höhen von A , B , C , D , E über der Horizontal-Ebene MN ;

c) die Linien AB , BC , CD , DE sind die wahren — und ab , bc , cd , de die auf den Horizont reducirten Entfernungen der Punkte A , B , C , D , E .

d) Die Figur $abcde$ heißt die auf den Horizont reducirte Figur $ABCDE$ oder deren Projection.

e) Sind $ABCDE$ gewisse Merkmal (Signale) in einer

*) Fäden oder Haare, an welchen schwere Körper ruhig herabhängen, stellen die Richtung der Schwere anschaulich dar.

Gegend, und zeichnet man auf dem Papiere eine, der auf den Horizont reducirten Figur $abcde$ ähnliche, Figur $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$; so heißt diese der Grundrifs (Plan) oder topographische Karte von $ABCDE$.

Anmerkung. Wenn in der Folge von der Richtung, oder vom Abstände zweyer Objecte, oder von einem Winkel, welchen zwey solche Richtungen bilden, die Rede ist, so versteht man dieß Alles jedes Mahl von den Projectionen, ausser es wird das Gegentheil bemerkt.

§. 92.

1) Eine gerade Linie, welche in einer Gegend mittelst Stäbe oder Mefs-Fahnen abgesteckt ist, wird gemessen durch das fortgesetzte Anlegen der Mefs-Kette, einer 50 oder 100 Fufs langen Kette von starkem Eisen- oder Messing-Drahte, deren jedes Glied genau einen Fufs hält, und woran alle zehn Fufs ein Zeichen mit den Zahlen 10, 20, 30, etc., an jedem Ende aber ein Ring als Handhabe sich befindet. Der in der Richtung der abgesteckten Linie vorausgehende Ketten-Zieher, trägt 10 kurze Zeichen-Stäbe mit sich, von welchen er jedes Mahl einen am Ende der Kette in die Erde steckt, nachdem die Kette genau horizontal in die Ebene der zu messenden Linie gebracht und hinlänglich angespannt worden ist. Der nachfolgende Ketten-Zieher sammelt die Zeichen-Stäbe wieder, und erkennt, nach fortgesetzter Wiederholung dieses Verfahrens, aus der Anzahl derselben die Länge der gemessenen Linie. Geht die zu messende Linie durch ein Terrain, welches ein oder mehrere längere Abhänge hat, so muß das Messen entweder durch Theile der Kette, die man horizontal anspannt, stufenweise geschehen, oder man mißt die schiefe Linie des Abhanges und reducirt diese nach Untersuchung des Abdachungs-Winkels auf die Horizontal-Linie (später §. 93.); denn nur diese wird zu wissen verlangt. (§. 91. 2. c. und Anmerkung.)

2) Die vorzüglichsten Theile eines Winkel-Mefs-Instrumentes sind:

a) das Stativ oder Gestell, wodurch man dem Instrumente die geeignete Stellung geben kann;

- b) eine ebene Scheibe, auf welcher ein ganzer Kreis mit einem in Grade, Minuten etc. getheilten Rande construirt ist;
- c) eine, um den Mittel-Punct des Kreises bewegliche Regel mit einem Tubus, welcher zugleich in einer, auf dem Kreise senkrechten, Ebene beweglich ist *).

(Fig. 10.) Will man in einer Gegend, mit Hilfe eines solchen Winkel-Messers, einen Winkel, welchen zwey Richtungen AB und BC bey B bilden, messen; so bringe man das Instrument genau horizontal über B so an, daß der Mittel-Punct der Scheibe b genau senkrecht über B zu stehen kommt. Stelle die Kante der Regel mit dem Tubus auf 0° und befestige sie, mittelst der daran befindlichen Schraube, an dem eingetheilten Rande. Nun drehe man das ganze Instrument um seine Achse, so, daß man durch die Achse des Tubus genau den Punct C sieht, und befestige dann die Scheibe. Endlich löse man mittelst der erwähnten Schraube die Regel mit dem Tubus wieder ab, und drehe diese so lange, bis man wieder in der Achse des Tubus den Punct A erblickt. Auf dem eingetheilten Rande wird man dann, von 0° an bis an die Kante der Regel, die Grade, Minuten etc., welcher der auf den Horizont reducirte Winkel ABC hält, ablesen können. — Da die Visir-Linien bC und bA durch die horizontale Stellung des Instruments in den beyden Vertical-Ebenen bBc und bBA liegen, so ist der gemessene Winkel der Neigungs-Winkel dieser beyden Vertical-Ebenen d. i. der auf den Horizont reducirte Winkel ABC (§. 91. d. und Anmerkung.)

Sollte man die wirkliche Gröfse eines in einer schiefen Ebene liegenden Winkels messen, so müßte die Scheibe genau in die Ebene des Winkels gebracht und dann wie oben verfahren werden **).

*) Genauere Erklärung der verschiedenen Winkel-Mess-Instrumente, so wie des Nonius, bey der Vorzeigung der Instrumente. (Hierüber s. Schulz Montanus Erd-Mess-Kunde und Puissant Topographie.)

**) Genauere Beschreibung, Winkel mit den verschiedenen Instrumenten zu messen, in der practischen Geometrie.

I.

Aufgaben über ebene Trigonometrie.

§. 93.

Aufgabe. (*Fig. 4.*) Man soll die Horizontal-Projection AB der Linie $BC = 480'$, deren Neigung gegen den Horizont $15^\circ 27'$ beträgt, finden (oder die gemessene schiefe Linie BC auf die horizontale AB reduciren).

Auflösung. Es ist $BAC = 90^\circ$, folglich nach §. 39. $BC:AB = 1:\cos. B$, woraus $AB = BC \cdot \cos. B = 480 \cdot \cos. 15^\circ 27' = 462,6'$ ist *).

§. 94.

Aufgabe. (*Fig. 4.*) Man soll die Höhe eines Thurmes AC berechnen, wenn er vom Punkte B aus, welcher mit der Basis des Thurmes in derselben Horizontal-Ebene liegt und von demselben $132'$ absteht, unter einem Winkel $CBA = 48^\circ 54'$ erscheint.

Auflösung. Es ist $BAC = 90^\circ$, folglich nach §. 39. $BA:AC = 1:tg. B$, woraus $AC = BA \cdot tg. B = 132 \cdot tg. 48^\circ 54' = 151,3'$.

§. 95.

Aufgabe. (*Fig. 20.*) BDC sey die Abrundung der äusseren Abdachung des Grabens, welche zwischen den gleichen Verlängerungen AB und AC der beyden Facen eines Bollwerkes liegt. Man verlangt die Sehne BC und die Linie DE dieser Abrundung zu wissen, wenn $AB = 120'$ und der Bollwerks - Winkel $FAG = 83^\circ 8'$ misst.

Auflösung. Es ist $AB = AC = 120'$, $FAG = CAB = 83^\circ 8'$, ferner AD senkrecht auf CB; folglich $AB:BE = 1:\sin. \frac{1}{2}BAC$, woraus $BE = 79,62'$, also $CB = 159,24'$ ist. Ferner ist auch $AB:AE = 1:\cos. \frac{1}{2}BAC$, woraus $AE = 89,78'$, mithin $DE = AD - AE = 30,2'$ ist.

*) Der Anfänger unterlasse nicht, die Aufgaben nachzurechnen.

Zusatz. Ist anstatt des Radius AB die Graben-Breite AH gegeben, so muß man zuerst aus dieser und dem Winkel $ABH = FAG$ im rechtwinkligen $\triangle ABH$ den Radius AB suchen, und dann wie oben verfahren.

§. 96.

Aufgabe. (Fig. 21.) Es sey DC die Richt-Linie und AC die Achse eines französischen Zwölfpfünders. Man soll den Winkel bey C, welchen diese beyden Linien bilden, finden, wenn $AD = 6,231''$, $BE = 4,926''$ ferner $AB = 77,254''$ Pariser-Maß ist.

Auflösung. Man ziehe, durch E, $FE \perp AB$, dann ist $DEF = DCA = x$; ferner $FE = AB = 77,254''$ und $DF = AD - BE = 1,305''$. Folglich ist, in dem bey F rechtwinkligen Drey-ecke DFE, $DF:FE = \text{tang. } x:1$, woraus $\text{tang. } x = \frac{DF}{FE}$ u. $x = 0^\circ 58'$.

§. 97.

Aufgabe. Man soll bey obigem französischen Zwölfpfünder, welcher mit 3° Elevation gerichtet ist, finden, wie hoch die Richt-Linie sich auf eine Entfernung von 600 Toisen erheben werde.

Auflösung. Da nach §. 96. die Richt-Linie mit der Achse einen Winkel von $58'$ macht, so wird sie mit dem Horizonte nur einen Winkel von $3^\circ - 58' = 2^\circ 2'$ machen. Es wird also die Höhe der Richt-Linie über eine horizontale Entfernung von 600 Toisen mit dieser ein rechtwinkliges Dreyeck bilden, in welchem der Winkel $2^\circ 2'$ der eben genannten Höhe (oder x) entgegen steht. Daher $x : 600 = \text{tang. } 2^\circ 2' : 1$, woraus $x = 21,3$ Toisen ist.

§. 98.

Aufgabe. (Fig. 8.) Man soll die Abstände AB und AC eines Punctes A von den beyden Batterien B und C finden.

Auflösung. Man messe den Abstand beyder Batterien BC, so wie die Winkel ABC und ACB. Es sey z. B. $BC = 256^\circ$, $ABC = 84^\circ 14'$ und $ACB = 85^\circ 40'$. Dann ist $BAC = 10^\circ 6'$ und $AB:BC = \sin. C : \sin. A$, woraus $AB = 1456^\circ$; dann $AC:BC = \sin. B : \sin. A$, woraus $AC = 1452^\circ$ ist. (§. 40.)

§. 99.

Aufgabe. (Fig. 22.) Man soll finden, um wie viel das Ziel D höher liegt, als die Batterie A.

Auflösung. Es sey AC das Niveau der Batterie. Man messe den Höhen-Winkel DAC, wähle einen Punct B, so, daß AB nicht zu klein im Verhältnisse zu AD wird, messe AB, so wie die beyden Winkel DAB und DBA; dann ist, im $\triangle ABD$, $AB : AD = \sin. ADB : \sin. ABD$, woraus $AD = \frac{AB. \sin. ABD}{\sin. ADB}$. Ferner, im $\triangle ADC$, $AD : DC = 1 : \sin. DAC$, also $DC = AD. \sin. DAC$ und endlich

$$DC = \frac{AB. \sin. ABD. \sin. DAC}{\sin. ADB}.$$

Ist z. B. $AB = 206,4'$, $DAC = 4^\circ 38'$, $DAB = 54^\circ$ und $ABD = 76^\circ 30'$, so ist $DC = \frac{206,4. \sin. 76^\circ 30'. \sin. 4^\circ 38'}{\sin. 40^\circ 30'}$.

Nun ist $\log. 206,4 = 2,4718782$

$\log. \sin. 76^\circ 30' = 0,9878315 - 1$

$\log. \sin. 4^\circ 38' = 0,9072975 - 2$

$D.E. \log. \sin. 40^\circ 30' = 0,1189545$

$\log. DC = 1,4859617$ und $DC = 30,6'$.

Zusatz. Auf ähnliche Art mißt man auch die Höhe eines unzugänglichen Gebäudes.

§. 100.

Aufgabe. (Fig. 23.) A und B seyen zwey unzugängliche Objecte. Sie werden von der Stand-Linie $CD = a = 750'$ unter den Winkeln $ADC = \alpha = 110^\circ$, $BDC = \beta = 37^\circ 40'$, $BCD = \gamma = 117^\circ 30'$ und $ACD = \delta = 38^\circ 20'$ gesehen. Man soll daraus die Entfernung $AB = x$ berechnen.

Auflösung. Durch die gegebenen Winkel sind auch o und n bestimmt. Es ist im $\triangle BDC$:

$$a. BD = \sin. n : \sin. \gamma, \text{ also } BD = \frac{a. \sin. \gamma}{\sin. n};$$

eben so im $\triangle ADC$:

$$a : AD = \sin. o : \sin. \delta, \text{ also } AD = \frac{a. \sin. \delta}{\sin. o}.$$

Nun ist im $\triangle ABD$ nach §. 44.

$$AB = \sqrt{[BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos. (\alpha - \beta)]} \text{ oder}$$

$$x = a \sqrt{\left[\left(\frac{\sin. \gamma}{\sin. n} \right)^2 + \left(\frac{\sin. \delta}{\sin. o} \right)^2 - \frac{2 \sin. \gamma \cdot \sin. \delta \cdot \cos. [\alpha - \beta]}{\sin. n \cdot \sin. o} \right]}$$

$$= 1562,8'.$$

I. Zusatz. Auf ähnliche Art kann man die Lage mehrerer Punkte, welche von der bekannten Stand-Linie aus gesehen werden können, berechnen.

II. Zusatz. Würste man umgekehrt in obiger Aufgabe schon die Distanz AB der beyden unzugänglichen Objecte, und wollte man mit Hilfe obiger Winkel die allenfalls unmeßbare Länge DC finden; so nehme man für DC irgend eine bekannte Zahl berechne nach dieser wie oben mit Hülfe der gegebenen Winkel die Linie AB, und suche den wahren Werth von DC durch Proportion, indem (wegen Aehnlichkeit der Figuren) der angenommene Werth von DC zu dem wirklichen (gesuchten) sich gerade so verhält, wie der durch die Berechnung gefundene Werth von AB zu dem gegebenen.

§. 101.

Aufgabe. (Fig. 24.) Man soll einen Punct D finden, der in die Verlängerung von AB fällt, vorausgesetzt, daß ein Punkt zwischen B und D es unmöglich macht von D nach B oder A zu sehen.

Auflösung. Man wähle einen Punct C ausserhalb der Linie AB, so, daß man von demselben nach A und B sehen kann. Nun messe man AC und CB dann $\angle ACB$, so kann man nach §. 43. die Winkel BAC und ABC berechnen. Man wähle einen passenden Winkel ACD so, daß CD die Verlängerung AB schneidet, und betrachte das $\triangle ACD$, worin AC, CAD und ACD bekannt, also die wirkliche Länge von CD leicht zu finden ist. Dieses gefundene Maß in der Richtung von C nach D aufgetragen, bestimmt den gesuchten Punct D.

Zusatz. Im Falle man, wegen Beschränktheit des Terrains, von C aus nur einen der Punkte A und B, z. B. B, sehen sollte, so wähle man noch einen anderen E, von welchem man nach A und C sehen kann. Hierauf messe man

AE, EC, CB und die Winkel AEC, ECB, und berechne aus dem $\triangle ACE$ die Seite AC wie den Winkel ACE, wodurch man auch den Winkel ACB kennt, und die Aufgabe wie oben verfolgen kann.

(Es würde nach Obigem nicht schwer seyn, eine Batterie in der Verlängerung einer Courtine anzulegen.)

§. 102.

Aufgabe. (Fig. 25.) Durch einen gegebenen Punct A auf einem Terrain eine gerade Linie parallel mit einer anderen unzugänglichen Linie CD zu ziehen.

I. Auflösung. Es wird AK die gesuchte Parallele seyn, wenn $\angle DAK = \angle ADC$ ist. Da man aber den Winkel ADC nicht kennt, und nicht direct messen kann, so messe man $\angle CAD$ und wähle nicht, zu sehr entfernt von A, einen Punct B, von welchem aus man CD unter demselben Winkel wie $\angle CAD$ sieht, d. i. so, daß $\angle CBD = \angle CAD$ wird. Es müssen dann die Projectionen der vier Puncte A, B, C, D in die Kreis-Linie fallen, welche um das $\triangle CDB$ gezogen werden kann; und dann wird $\angle CBA = \angle CDA$ seyn. Mißt man nun $\angle CBA$ und macht man $\angle DAK = \angle CBA$, so muß $AK \parallel CD$ seyn.

II. Auflösung. Könnte man, eines Hindernisses wegen, den Punct B wie oben (I) nicht finden, so wähle man eine Basis AB, dem Augenmaße nach wie CD, und messe in A die Winkel CAB, DAB, dann in B die Winkel DBA und CBA, und berechne AC aus dem $\triangle ACB$, so wie AD aus dem $\triangle ABD$, da in jedem dieser Dreyecke eine Seite und die beyden daranliegenden Winkel bekannt sind. Nun kennt man auch $\angle CAD$, also im $\triangle ACD$ zwey Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel, woraus man die beyden Winkel CDA und DCA finden kann. Macht man nun $\angle DAK = \angle CDA$ so ist $AK \parallel CD$.

III. Auflösung. Hätte man keine trigonometrischen Tafeln zur Hand, so construire man, nach einem gewählten Maß-Stabe, die Figur abdc auf dem Papiere, ähnlich mit ABDC nach Maßgabe der Winkel bey A und B; dann wird man den Winkel cda erhalten, und, wenn man $\angle DAK = \angle cda$ macht, $AK \parallel CD$ seyn. (Diese Auflösungs-Art ist oft wegen

Unzuverlässigkeit der Construction nicht sehr genau und ihr daher jede andere, welche durch Calcul gelöst wird, vorzuziehen.

§. 103.

Aufgabe. (*Fig. 26.*) Die Richtung der Capitale CG einer unzugänglichen Bastion ACB zu finden.

Auflösung. Die Capitale CG halbt den Bastions-Winkel ACB. Dieß vorausgesetzt, wähle man in der Richtung der Face BC einen Punct D und in der Richtung der Face AC einen anderen E, und messe die beyden Winkel CDE und CED. Dadurch kennt man im $\triangle DCE$ den Winkel DCE als Supplement der Summe der gemessenen, also auch den Bastion-Winkel ACB, indem $ACB = DCE$ ist. Ist nun CK die Verlängerung der Capitale, so ist DCK sowohl, als auch $ECK = \frac{1}{2}ACB$. Man construire endlich die Winkel EDF und DEF, jeden $= \frac{1}{2}DCE$, dann liegt der Durchschnitts-Punct F in der Peripherie des durch die drey Puncte D, C und E beschriebenen Kreises und in der Verlängerung von CG, im gleichen Abstände von D und E; denn, weil FC den Winkel DCE halbt, so halbt sie auch den Bogen DE und trifft in dessen Mitte F ein. Durch die Puncte C und F ist also die Richtung der Capitale gefunden. Setzt man $CDE = \alpha$, $CED = \beta$ und $BC = a$; so erhält man

$$DK = \frac{a \sin. \beta}{2 \sin. \frac{1}{2}[\alpha + \beta] \cos. \frac{1}{2}[\alpha - \beta]}.$$

I. Zusatz. Halbt man die beyden Winkel CDE und CED durch DF' und EF', so ist ihr Durchschnitts-Punct F' der Mittel-Punct des im $\triangle DCE$ beschriebenen Kreises, also auch in der Verlängerung der Capitale, welche den dritten Winkel dieses Dreyeckes halbt.

II. Zusatz. Wäre man durch das Terrain beengt, und könnte man daher weder F noch F' bestimmen, so müßte man den Punct K in DE so suchen, daß $CKE = 180^\circ - [CEK + KCE]$ wird. Dann ist auch K ein Punct der verlängerten Capitale.

§. 104.

Aufgabe. (*Pig. 27.*) Die Lage dreier unzugänglichen Puncte (Objecte) A, B, C ist bekannt, man soll daraus die Lage eines vierten D finden, wenn α und β die bey-

den Winkel sind, unter welchen obige drey Punkte gesehen werden.

I. Auflösung. Da das $\triangle ABC$ bekannt ist, so sind, ausser den gemessenen Winkeln $ADC = \beta$ und $CDB = \alpha$, auch noch $AC = b$, $CB = a$ und $ACB = C$ bekannt. Man setze die Winkel $CAD = x$ und $CBD = y$, denn von diesen hängt die Auflösung der Aufgabe ab.

Es ist dann $y = 360^\circ - [C + \alpha + \beta] - x$ und auch $= m - x$, wenn man $360^\circ - [C + \alpha + \beta] = m$ setzt.

Im $\triangle ADC$ ist:

$$CD : b = \sin. x : \sin. \beta, \text{ also } CD = \frac{b \cdot \sin. x}{\sin. \beta};$$

ferner im $\triangle CDB$:

$$CD : a = \sin. y : \sin. \alpha, \text{ also } CD = \frac{a \cdot \sin. y}{\sin. \alpha} = \frac{a \cdot \sin. [m - x]}{\sin. \alpha}.$$

$$\text{Daher } \frac{a \cdot \sin. [m - x]}{\sin. \alpha} = \frac{b \cdot \sin. x}{\sin. \beta},$$

$$\frac{\sin. m \cdot \cos. x - \cos. m \cdot \sin. x}{\sin. x} = \frac{b \cdot \sin. \alpha}{a \cdot \sin. \beta} \quad (\S. 20. X.)$$

$$\sin. m \cdot \cot. x - \cos. m = \frac{b \cdot \sin. \alpha}{a \cdot \sin. \beta} \text{ und}$$

$$\cot. x = \frac{b \cdot \sin. \alpha}{a \cdot \sin. \beta \cdot \sin. m} + \cot. m.$$

Setzt man, um diese Formel zur logarithmischen Berechnung tauglicher zu machen,

$$\frac{b \cdot \sin. \alpha}{a \cdot \sin. \beta \cdot \sin. m} = \cot. \varphi, \text{ so ist:}$$

$$\cot. x = \cot. \varphi + \cot. m = \frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi} + \frac{\cos. m}{\sin. m},$$

$$= \frac{\sin. m \cdot \cos. \varphi + \cos. m \cdot \sin. \varphi}{\sin. m \cdot \sin. \varphi} = \frac{\sin. [m + \varphi]}{\sin. m \cdot \sin. \varphi},$$

oder auch $\tan. x = \frac{\sin. m \cdot \sin. \varphi}{\sin. [m + \varphi]}$, woraus man, nach Be-

rechnung des Hilfs-Winkels φ , [aus $\cot. \varphi = \frac{b \cdot \sin. \alpha}{a \cdot \sin. \beta \cdot \sin. m}$,

oder besser aus $\tan. \varphi = \frac{a \cdot \sin. \beta \cdot \sin. m}{b \cdot \sin. \alpha}$] den Winkel x sehr

leicht finden kann. Kennt man x , so hat man auch y , und im $\triangle ACD$ sowohl, als im $\triangle CDB$, sind zwey Winkel und eine Seite bekannt, also die zu suchenden Distanzen AD , CD und BD leicht zu berechnen. Man vergesse nicht, die größte Aufmerksamkeit auf die positive oder negative Bedeutung der trigonometrischen Linien für die treffenden Winkel zu richten und wohl zu erwägen, ob die Winkel φ und x spitz oder stumpf zu nehmen sind.

Der Stand-Ort D kann in Bezug auf die Orte A, B und C verschiedene Lagen haben, und es modificiren sich darnach die Werthe obiger Formel. Nämlich:

1) Wenn C oberhalb und D unterhalb AB liegt (*Fig. 27.*), dann ist $C < 180^\circ$ und wie oben $m = 360^\circ - [C + \alpha + \beta]$.

2) Wenn C in die Linie AB fällt (*Fig. 28.*), dann ist $C = 180^\circ$, folglich $m = 360^\circ - [180 + \alpha + \beta] = 180^\circ - [\alpha + \beta]$.

3) Liegt C und D , beyde unterhalb AB (*Fig. 29.*), dann ist C d. i. der erhabene Winkel $ACB = 360^\circ - \text{hohl } C$, also $m = 360^\circ - [360^\circ - \text{hohl } C + \alpha + \beta] = \text{hohl } C - [\alpha + \beta]$, indem der hohle Winkel C als bekannt angenommen ist.

4) Liegt der Stand-Ort D innerhalb des $\triangle ABC$ (*Fig. 30.*), dann ist, wie bey 1) $m = 360^\circ - [C + \alpha + \beta]$.

5) Würde D in die Peripherie des Kreises um das $\triangle ABC$ fallen, welches dann Statt findet, wenn $C + \alpha + \beta = 180^\circ$ ist; so ist die Aufgabe unbestimmt, indem α und β , wenn D in was immer für Punkte der genannten Peripherie fällt, immer dieselben bleiben, also die Lage des Stand-Ortes nicht bestimmen. Es zeigt sich dieß auch aus der Formel, welche für diesen Fall einen unbestimmten Ausdruck gibt. Zur Auflösung einer solchen Aufgabe müßte man, wenn im Felde noch mehrere Punkte bekannt sind, zur Bestimmung des Punktes D von jenen ein anderes Dreyeck wählen, welches mit D nicht in einer Kreis-Peripherie liegt.

Beyspiele zur Uebung.

1) Es sey (*Fig. 27.*) $ACB = 115^\circ$, $a = 2000^\circ$, $b = 1112^\circ$, dann $\alpha = 45^\circ$ und $\beta = 25^\circ$. Nach gehöriger Berechnung ergibt sich hier $x = 127^\circ 6'$, $AD = 1083,33^\circ$ u. s. w.

2) Es sey (Fig. 30.) $ACB = 65^\circ 7'$, $a = 3796$, $b = 2514$,
 $\alpha = 113^\circ 20'$, $\beta = 135^\circ 19'$. Hier wird $x = 24^\circ 53' 22''$
 u. s. w.

II. Auflösung. Es ist wie oben $CD = \frac{b \sin x}{\sin \beta} = \frac{a \sin y}{\sin \alpha}$,

also $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}$, ferner

$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{a \sin \beta + b \sin \alpha}{a \sin \beta - b \sin \alpha}$ und daraus

$\text{tang } \frac{1}{2}[x-y] = \text{tang } \frac{1}{2}[x+y] \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha}$ (§. 25. XXX.)

woraus man, da $x + y$ bekannt ist, $x - y$, also auch x
 und y finden kann. — Um diese Formel zur Berechnung
 durch Logarithmen tauglicher zu machen, verwandle man
 sie in

$\text{tang } \frac{1}{2}[x-y] = \text{tang } \frac{1}{2}[x+y] \frac{1 - \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}{1 + \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}$ und setze

$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \text{tang } \varphi$, so ist, weil $\text{tang } 45^\circ = 1$ ist,

$\text{tg } \frac{1}{2}[x-y] = \text{tg } \frac{1}{2}[x+y] \frac{\text{tang } 45^\circ - \text{tang } \varphi}{\text{tang } 45^\circ + \text{tang } \varphi} =$

$\text{tang } \frac{1}{2}[x+y] \cdot \text{tang } [45^\circ - \varphi]$ (§. 25. XX.). Ist $\varphi > 45^\circ$,
 so hat man $\text{tang } \frac{1}{2}[x-y] = \text{tang } \frac{1}{2}[x+y] \text{tang } [\varphi - 45^\circ]$.
 (Man berechne obige Beyspiele auch nach dieser Formel.)

§. 105.

Aufgabe. (Fig. 31.) Die Lage dreier Orte A, B, C
 ist bekannt; man soll die Lage zweier anderen Orte D und E
 gegen jene finden, vorausgesetzt, daß man von D aus bloß
 gegen A, C, E und von E aus nur gegen D, C, B sehen,
 also die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ messen kann.

Auflösung. Es ist $y = 540^\circ - [C + \alpha + \beta + \gamma + \delta] - x$
 $= m - x$, wenn man $m = 540^\circ - [C + \alpha + \beta + \gamma + \delta]$ setzt.

Im $\triangle DCE$ ist: $DC : CE = \sin \gamma : \sin \beta$, folglich

da, aus $\triangle ACD$, $DC = \frac{b \sin x}{\sin \alpha}$ und, aus $\triangle CEB$, $CE = \frac{a \sin y}{\sin \delta}$,

ist, $\frac{b \sin. x}{\sin. \alpha} : \frac{a \sin. [m-x]}{\sin. \delta} = \sin. \gamma : \sin. \beta$, woraus

$$\frac{a \sin. \alpha \sin. \gamma}{b \sin. \beta \sin. \delta} = \frac{\sin. x}{\sin. [m-x]} \text{ ist.}$$

Setzt man $\frac{a \sin. \alpha \sin. \gamma}{b \sin. \beta \sin. \delta} = \operatorname{tg.} \varphi$, so ist:

$$\operatorname{tg.} \varphi = \frac{\sin. x}{\sin. [m-x]} = \frac{\sin. x}{\sin. m \cos. x - \cos. m \sin. x}, \text{ daraus folgt:}$$

$$1 - \operatorname{tg.} \varphi = \frac{\sin. m \cos. x - [1 + \cos. m] \sin. x}{\sin. m \cos. x - \cos. m \sin. x} \text{ und}$$

$$1 + \operatorname{tg.} \varphi = \frac{\sin. m \cos. x + [1 - \cos. m] \sin. x}{\sin. m \cos. x - \cos. m \sin. x}, \text{ also nach §. 25. Z.}$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg.} \varphi}{1 + \operatorname{tg.} \varphi} = \cot. [45^\circ + \varphi] = \frac{\sin. m \cos. x - [1 + \cos. m] \sin. x}{\sin. m \cos. x + [1 - \cos. m] \sin. x}$$

$$= \frac{\sin. m - [1 + \cos. m] \operatorname{tg.} x}{\sin. m + [1 - \cos. m] \operatorname{tg.} x}$$

$$= \frac{\sin. m}{1 + \cos. m} - \operatorname{tg.} x$$

$$= \frac{\sin. m}{1 + \cos. m} + \frac{1 - \cos. m}{1 + \cos. m} \operatorname{tg.} x.$$

$$\text{Nun ist } \frac{\sin. m}{1 + \cos. m} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} m \cos. \frac{1}{2} m}{2 \cos^2 \frac{1}{2} m} = \operatorname{tg.} \frac{1}{2} m \text{ (§. 21. und 22.)}$$

$$\frac{1 - \cos. m}{1 + \cos. m} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} m}{2 \cos^2 \frac{1}{2} m} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} m. \text{ Also}$$

$$\cot. [45^\circ + \varphi] = \frac{\operatorname{tg.} \frac{1}{2} m - \operatorname{tg.} x}{\operatorname{tg.} \frac{1}{2} m + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} m \operatorname{tg.} x} = \frac{\operatorname{tg.} \frac{1}{2} m - \operatorname{tg.} x}{\operatorname{tg.} \frac{1}{2} m [1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} m \operatorname{tg.} x]} \text{ u.}$$

$$\operatorname{tg.} \frac{1}{2} m \cot. [45^\circ + \varphi] = \frac{\operatorname{tg.} \frac{1}{2} m - \operatorname{tg.} x}{1 + \operatorname{tg.} \frac{1}{2} m \operatorname{tg.} x} = \operatorname{tg.} [\frac{1}{2} m - x], \text{ woraus}$$

$$\operatorname{tg.} [\frac{1}{2} m - x] = \frac{\operatorname{tg.} \frac{1}{2} m}{\operatorname{tg.} [45^\circ + \varphi]} \text{ ist, wodurch man, nach Berech-}$$

nung des Hülfswinkels φ aus Obigem, sowohl x als auch die übrigen Stücke der Aufgabe leicht finden kann.

B e y s p i e l.

[. Es sey $a=173'$, $b=243'$, $C=99^\circ 41'$, $\alpha=42^\circ 53'$, $\beta=67^\circ 9'$, $\gamma=83^\circ 54'$ und $\delta=26^\circ 37'$. — Hier wird $x=97^\circ 51' 57''$, und dadurch auch y , AD , DC , CE , EB und DE bekannt.

I. Zusatz. Kann man ausser den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch Visiren auch noch die Winkel AEB und ADB messen, so erhält man noch mehrere Bestimmungs - Stücke, als Prüfungs - Mittel für berechnete Resultate.

II. Zusatz. Diese Aufgabe bleibt auch bestimmt, wenn auch D und E in die Peripherie des um $\triangle ABC$ beschriebenen Kreises fallen. Sie hat eben desswegen für neue Orts-Bestimmungen bedeutende Vorzüge vor der vorhergehenden Aufgabe (§. 104.), besonders wenn bey dieser D (Fig. 27.) in eine unbestimmte Lage gegen A, B, C, oder doch derselben nahe fällt, welches letztere immer geschieht, wenn D nahe an der Peripherie des durch A, B, C beschriebenen Kreises liegt.

§. 106.

Aufgabe. (Fig. 36.) Es sey EHF der Aequator, dann AB ein Parallel-Kreis der Erde (diese als Kugel betrachtet), ferner AE oder ACE $= \alpha$ die Breite des letzteren; man soll die Grad - Länge dieses Parallel - Kreises finden, vorausgesetzt, daß ein Grad des Aequators 15 geographische Meilen beträgt.

Auflösung. Ist AD der Radius des Parallel - Kreises so ist für $AC=1, AD = \cos. DAC = \cos. \alpha$, indem $AD \perp EC$ ist. Nun verhalten sich die Peripherien der Kreise wie ihre Radien; also auch hier

$$1^\circ \text{ des Parallelkr. : } 1^\circ \text{ des Aequat.} = AD : EC \text{ oder}$$

$$1^\circ \text{ „ „ „ : } 15 \text{ g. M.} = \cos. \alpha : 1, \text{ also}$$

$$1^\circ \text{ des Parallelkr.} = 15 \cos. \alpha^*) \text{ geograph. Meilen.}$$

Hieraus folgt im Allgemeinen, daß die Grade verschiedener Parallel - Kreise sich verhalten wie die Cosinus ihrer Breiten.

B e y s p i e l.

Wie groß ist ein Grad des Parallel - Kreises,

1) dessen Breite 60° ist? (Antw. $7\frac{1}{2}$ g. M.),

2) dessen Breite 52° ist? (Antw. 9,234 g. M.).

*) Für $\sin. tot. = 1$.

Aufgaben zur Selbstübung.

- 1) Die Seite eines regulären Siebeneckes ist $136'$, wie groß dessen Fläche?
- 2) Drey aufeinander folgende Seiten eines Viereckes sind $17' 8''$, $34' 6''$, $22' 10''$ Duodec. Mafs; die erste bildet mit der zweyten einen Winkel von $124^{\circ} 15'$, die zweyte mit der dritten einen Winkel von $86^{\circ} 30'$. Man soll die beyden Diagonalen und die Fläche dieses Viereckes finden?
- 3) Der Bogen eines Kreis-Abschnitts hält $54^{\circ} 37'$ und der Radius des Kreises $40' 8''$; wie groß ist die Fläche dieses Segmentes?
- 4) Die drey Seiten eines Dreyeckes sind $15'$, $18'$ und $21'$, man soll dessen Fläche und den Cubic-Inhalt der Kugel finden, deren Radius der des um das Dreyeck beschriebenen Kreises ist.
- 5) Die Sehne eines Kreis-Abschnittes hält $1,8'$, der Abstand der Mitte des Bogens dieses Abschnitts von der Mitte der Sehne $3,35'$; man soll den Cubic-Inhalt des dazu gehörigen Kugel-Abschnittes finden.
- 6) Zwey Punkte liegen auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius $= 15'$ ist, in einem Parallal-Kreise, welcher $25^{\circ} 24'$ vom Aequator absteht, $8^{\circ} 15'$ von einander entfernt; man soll ihren Abstand (Sehne) sowohl, als die Länge des zwischen ihnen liegenden Bogens finden.
- 7) Ein schiefer Kegel wird mittelst einer Ebene senkrecht auf der Grund-Fläche durch die Achse geschnitten. Die Durchchnitts-Figur ist ein Dreyeck, in welchem die beyden, an der Spitze des Kegels unter einem Winkel von $20^{\circ} 26'$ zusammenstossenden, Seiten $15'$ und $12'$ betragen. Man soll die Höhe dieses Kegels finden.
- 8) Unter welchem Winkel würde man die Erde vom Mittel-Puncte des Mondes aus sehen, wenn der mittlere

Abstand beyder Gestirne 38411 Myriameter und der Erd-Radius 6366198 Meter ist?

9) Die Winkel eines Dreyeckes sind nebst der Höhe gegeben; man suche den Inhalt des Dreyeckes. Es sey z. B. $A = 47^{\circ} 28' 25''$, $B = 36^{\circ} 52' 15''$, $C = 95^{\circ} 39' 20''$, und $h = 43,8'$.

10) Es sey von einem regulären Polygone die Seite a , dann der Radius des darum oder der des darin beschriebenen Kreises gegeben; man soll die Seiten-Zahl n und den unbekannten Radius finden.

11) (*Fig. 32.*) Es sey $AB = 150^{\circ}$ die Seite eines regulären Fünfeckes, das Perpendikel $DE = 50^{\circ}$, die Face AH der Bastion $= 100^{\circ}$ und die Defensions-Linie $AG = AK$. Wie großs ist:

- a) der Tenailen-Winkel AEB ,
- β) die Defensions-Linie AK oder AG ,
- γ) der Bastions--Winkel HAH' ,
- δ) die Courtine FG ,
- ε) der Schulter-Winkel AHF ,
- ζ) die Flanke FH und
- η) der Winkel der Flanke GFH ?

II.

Aufgaben über sphärische Trigonometrie.

§. 107.

Aufgabe. (Fig. 33.) Die drey Seiten a, b, c eines sphärischen Dreyeckes sind gegeben; man soll

- 1) das Perpendikel $CD = m$ finden,
- 2) die beyden dadurch entstehenden Segmente $AD = x$ und $DB = y$ der Basis c berechnen.

Auflösung. 1) Im rechtwinklig - sphärischen $\triangle ACD$ ist, $\sin. b : \sin. m = 1 : \sin. A$, also

$$\begin{aligned} \sin. m &= \sin. b. \sin. A \\ &= 2 \sin. b. \sin. \frac{1}{2} A. \cos. \frac{1}{2} A. \quad (\S. 21. XII.) \\ &= 2 \sin. b. \sqrt{\frac{\sin. [S-b] \sin. [S-c]}{\sin. b. \sin. c.}} \times \sqrt{\frac{\sin. S. \sin. [S-a]}{\sin. b. \sin. c.}} \quad (\S. 65.) \\ &= \frac{2}{\sin. c} \sqrt{\sin. S. \sin. [S-a] \sin. [S-b] \sin. [S-c]}. \end{aligned}$$

2) Ist m bekannt, so ist nach §. 62. Zus. I. im $\triangle ACD$ $\cos. b = \cos. x. \cos. m$, also $\cos. x = \frac{\cos. b}{\cos. m}$, eben so im

$\triangle CDB$, $\cos. a = \cos. y. \cos. m$, also $\cos. y = \frac{\cos. a}{\cos. m}$.

3) Will man x unmittelbar aus den gegebenen Stücken finden, so ist, wie vorhin im $\triangle ACD$, $\cos. m = \frac{\cos. b}{\cos. x}$

und im $\triangle CBD$, $\cos. m = \frac{\cos. a}{\cos. y} = \frac{\cos. a}{\cos. [c-x]}$, also

$$\frac{\cos. b}{\cos. x} = \frac{\cos. a}{\cos. [c-x]}, \text{ ferner}$$

$$\frac{\cos. [c-x]}{\cos. x} = \frac{\cos. c. \cos. x + \sin. c. \sin. x}{\cos. x} = \frac{\cos. a}{\cos. b} \quad \text{oder}$$

$$\cos. c + \sin. c. \operatorname{tg}. x = \frac{\cos. a}{\cos. b}, \text{ also } \operatorname{tg}. x = \frac{\cos. a}{\cos. b. \sin. c} - \cot. c.$$

Um diese Formel für logarithmische Berechnung tauglich zu machen, setze man $\frac{\cos. a}{\cos. b. \sin. c} = \cot. \varphi$, so ist $\operatorname{tg}. x$

$$= \cot. \varphi - \cot. c = \frac{\sin. [\varphi - c]}{\sin. \varphi \cdot \sin. c} \quad (\S. 26. 14.), \text{ oder } \cot. x \\ = \frac{\sin. \varphi \cdot \sin. c}{\sin. [\varphi - c]}. \text{ Kennt man } x, \text{ so ist auch } y = c - x \\ \text{bekannt.}$$

§. 108.

Aufgabe. (Fig. 33.) Im sphärischen Dreyecke ABC sind bekannt der Winkel C dann die Segmente der Basis $AD = m$ und $DB = n$, welche durch das vom Puncte C auf c gefällte Perpendikel entstehen. — Man soll das Dreyeck finden.

Auflösung. Man setze $ACD = p$, und $DCB = q$, dann ist $p + q = C$. Es sey $p - q = x$, dann folgt aus diesen beyden Gleichungen $p = \frac{1}{2} [C + x]$ und $q = \frac{1}{2} [C - x]$. In den beyden rechtwinkligen Dreyecken ACD und DCB ist nach Form. Tab. I. 6.

$$\sin. CD = tg. m. \cot. p = tg. m. \cot. \frac{1}{2} [C + x],$$

$$\sin. CD = tg. n. \cot. q = tg. n. \cot. \frac{1}{2} [C - x].$$

$$\text{Daher } tg. m. \cot. \frac{1}{2} [C + x] = tg. n. \cot. \frac{1}{2} [C - x].$$

$$\frac{tg. m}{tg. n} = \frac{\cot. \frac{1}{2} [C - x]}{\cot. \frac{1}{2} [C + x]} = \frac{\sin. C + \sin. x}{\sin. C - \sin. x} \quad (\S. 26. 6.), \text{ woraus}$$

$$\sin. x = \frac{tg. n - tg. m}{tg. m + tg. n} \sin. C \text{ und nach } \S. 26. 15.$$

$$= \frac{\sin. [m - n]}{\sin. [m + n]} \sin. C = \frac{\sin. [m - n]}{\sin. c} \sin. C.$$

Ist x bekannt, so ist es auch p und q , also das ganze Dreyeck.

§. 109.

Aufgabe. (Fig. 34.) A und B seyen Objecte, welche über oder unter einer Horizontal-Ebene DCE liegen, man kennt den schiefgeneigten Winkel $ACB = C$, so wie die Elevationen von AC und BC über den Horizont, nämlich $ACD = a$ und $BCE = b$. Man soll den horizontalen Winkel DCE, d. i. die Horizontal-Projection vom Winkel ACB, finden.

Auflösung. Man stelle sich durch ACD und durch BCE Vertical-Ebenen gelegt vor. Diese schneiden sich in MC . Ferner seyen aus C mit gleichen Radien in den Ebenen MCE , MCD und ABC die Bogen MN , MO und PQ beschrieben. Dadurch entsteht ein sphärisches Dreyeck MPQ , worin die drey Seiten (nämlich $MP = 90^\circ - a$, $MQ = 90^\circ - b$ und $PQ = C$) bekannt sind. Es fragt sich nun um den sphärischen Winkel PMQ , dessen Grad-Maß dem Neigungswinkel der beyden Vertical-Ebenen oder dem verlangten Winkel DCE gleicht. (§. 59. Zus.) Dieser Winkel läßt sich nun leicht nach §. 70. finden.

1. **Beyspiel.** Es sey in obiger Aufgabe der schiefgeneigte Winkel $ACB = C = 60^\circ 30'$, dann die Höhen-Winkel $a = 2^\circ 35'$ und $b = 1^\circ 25'$. Nach gehöriger Berechnung (§. 70.) wird sich finden, daß $DCE = 60^\circ 31' 50''$ ist. *)

2. **Beyspiel.** Es liege A ober- und B' unterhalb der durch C gelegten Horizontal-Ebene und es sey $ACB' = C = 56^\circ 12'$, $ACD = a = 7^\circ 35'$ und $B'CE = -1^\circ 29'$. Hier wird sich $DCE = 55^\circ 36' 32''$ finden.

§. 110.

Aufgabe. (*Fig. 35.*) Es sey $MNOP$ eine Pyramide; man kennt die drey geradlinigen Winkel $MOP = a$, $MON = b$ und $NOP = c$. Es soll der Neigungswinkel der Kante MO gegen die Grund-Fläche gefunden werden.

Auflösung. Man beschreibe mit gleichen Radien aus O in den drey Ebenen, worin die gegebenen Winkel liegen, die Kreis-Bogen CB , AC und AB , so entsteht ein sphärisches $\triangle ABC$, worin die drey Seiten gemäß der Aufgabe gegeben sind. Legt man durch die Kante MO eine Vertical-Ebene, so ist MOD der verlangte Neigungswinkel. Nun beschreibe man in der Vertical-Ebene mit OC den Kreis-Bogen CD , so ist dieser das Perpendikel des sphärischen $\triangle ABC$ von C auf AB und zugleich das Maß des ge-

*) Der Anfänger unterlasse ja nicht, diese Zahlen-Beyspiele selbst nachzurechnen.

suchten Neigungs-Winkels. — Es ist demnach nach §. 107. dieses Perpendikel bekannt aus

$$\sin. CD = \frac{2}{\sin. c} \sqrt{[\sin. S. \sin. (S-a.) \sin. (S-b) \sin. (S-c)]},$$

§. 111.

Aufgabe. (*Fig. 36.*) Die geographischen Breiten zweyer Orte R und K, dann der Längen-Unterschied derselben (d. i. der sphärische Winkel RNK) sind gegeben; man soll ihre Bogen-Entfernung, die zu einem größten Kreise der Erd-Kugel gehört, berechnen.

Auflösung. Aus der Breite RG ergibt sich das Complement RN, eben so aus der Breite KH auch KN. Da auch der Längen-Unterschied dieser Orte, GH oder RNK, bekannt ist; so sind im sphärischen Dreyecke RNK zwey Seiten und der davon eingeschlossene Winkel gegeben, und es läßt sich daraus nach §. 79. 3. die dritte Seite RK finden. Den gefundenen Bogen reducirt man dann auf geographisches Meilen-Maß, deren 15 auf einen Grad gerechnet werden.

Beyspiel. Es sey die Breite von R = $52^{\circ} 31' 30''$, die von K = $48^{\circ} 40' 14''$, ihr Längen-Unterschied = $11^{\circ} 2' 30''$. — Es wird sich finden, daß RK = $7^{\circ} 53' 48''$ ist, oder 118 bis 119 geographische Meilen beträgt. (Dieses ist ungefähr die Bogen-Entfernung zwischen Paris und Berlin.)

§. 112.

Aufgabe. (*Fig. 36.*) Die geographischen Breiten RG und KH zweyer Orte R und K, dann ihre Entfernung RK im Bogen nach Meilen-Maß ist gegeben; man soll den Längen-Unterschied dieser beyden Orte, d. i. den sphärischen Winkel RNK oder GH finden.

Auflösung. In dieser Aufgabe kennt man die drey Seiten des sphärischen Dreyeckes RNK, nämlich RK, dann $RN = 90^{\circ} - RG$ und $NK = 90^{\circ} - KH$, und findet also den sphärischen Winkel RNK aus 1. der II. Form. Tab. — Nur muß man zuerst die Länge des Bogens RK auf Grade reduciren.

§. 113.

Aufgabe. (*Fig. 36.*) Die Bogen-Entfernung zweyer Orte R und K, die Breite von K, nämlich KH und das Azimuth des Ortes R in Beziehung auf den Meridian von K, nämlich der sphärische Winkel RKS, oder sein Supplement RKN, sind bekannt. Man soll GR d. i. die Breite des Ortes R und den Längen-Unterschied GH (oder RNK) beyder Orte finden.

Auflösung. Es ist im sphärischen Dreyecke RNK der Winkel RKN, dann die ihn einschließenden Seiten NK ($=90^\circ - KH$) und RK gegeben, welche letztere zuerst im Grad-Maße ausgedrückt werden muß. Man kann also leicht nach Form. Tab. II. 3. die Winkel RNK und KRN, dann die dritte Seite NR finden, woraus die gesuchte Breite $RG = 90^\circ - NR$ folgt.

§. 114.

Aufgabe. Aus der gegebenen Länge und Breite zweyer Orte auf der Erd-Oberfläche ihre Entfernung von einander zu finden.

Auflösung. (*Fig. 36.*) Es seyen R und K die beyden Orte, NFS der erste Meridian, NKS der Meridian von K und NRS jener von R, dann EHF der Aequator; ferner ist die Länge von K $= FH$, die Länge von R $= FG$, dann die Breite von K $= KH$ und die von R $= RG$.

Betrachtet man das sphärische $\triangle NRK$, so ist darin bekannt RN ($=90^\circ - RG$), NK ($=90^\circ - KH$) und der davon eingeschlossene Winkel RNK ($=GH = FG - FH$); also RK leicht zu finden (II. Form. Tab. 3.).

1. Beyspiel. Die geogr. Länge von Berlin ist $31^\circ 2' 15''$, die von Genua $26^\circ 38'$, die Breite von Berlin $52^\circ 31' 44''$, die von Genua $44^\circ 23' 48''$. Man soll die Entfernung zwischen Berlin und Genua in geogr. Meilen finden.

2. Beyspiel. Die geogr. Länge von Berlin ist $31^\circ 2' 15''$, die von Moskau $55^\circ 12' 45''$, die Breite von Berlin $52^\circ 31' 44''$, die von Moskau $55^\circ 45' 45''$. Wie weit ist Berlin von Moskau entfernt?

§. 115.

Aufgabe. (*Fig. 37.*) A, B, C seyen drey in einer Horizontal-Ebene liegende Punkte. Von diesen sieht man den erhöhten Punkt D. Man soll die Entfernung dieses letztern, so wie auch dessen Projection E, von jedem obiger drey Punkte, die gegenseitige Entfernung dieser selbst unter sich und endlich die Höhe des Punktes D über der Horizontal-Ebene finden, wenn gegeben ist AB, CDA, BDA, CDB, dann CAB, und DAC.

Auflösung. Man nehme an, es seyen in den Ebenen der Winkel CDA, BDA, CDB aus D mit gleichen Radien z. B. Da die drey Bogen *ab*, *ac*, *bc* beschrieben, so entsteht ein sphärisches $\triangle abc$.

Eben so denke man sich aus dem Punkte A mit einem willkührlichen Radius Ad in den Ebenen der drey Winkel DAC, CAB, DAB die drey Bogen *de*, *ef*, *df* beschrieben, so entsteht auch hier das sphärische Dreyeck *dfe*.

Die drey Winkel BDA, CDA, CDB sind gegeben, also *ab*, *ac*, *bc* bekannt. Es läßt sich also daraus *bac* finden (II. Form. Tab. 1). Nun ist $bac = edf$, weil beyde dem Neigungs-Winkel der Ebenen BDA und CDA gleichen, folglich ist auch *edf* bekannt.

Man kennt demnach in dem Dreyecke *efd* die beyden Seiten *de*, *ef* (da DAC und CAB gegeben sind) und den Winkel *edf*; mithin findet man daraus *df* oder DAB.

Im $\triangle ADB$ ist also bekannt DAB, BDA und AB; und man erhält daraus DA, DB und DBA.

Nun kennt man im $\triangle DAC$ die Winkel ADC und DAC dann DA, woraus DC, AC und DCA gefunden werden können.

Aus DC, DB und CDB im $\triangle CBD$ ergeben sich auch DCB, DBC und BC.

Aus dem sphärischen Dreyecke *dfe* ist *dfe* oder der Neigungs-Winkel EFD von ADB gegen CBA bekannt.

Es ist aber $DF = DB \cdot \sin. DBA$, folglich $DE = DF \cdot \sin. DFE = DF \cdot \sin. dfe = DB \cdot \sin. DBA \cdot \sin. dfe$, also die Höhe DE bekannt.

Ist die Höhe gefunden, so hat man in den bey E rechtwinkligen Dreyecken DAE, DEB, DEC, die Hypotenusen DA, DB, DC und die ihnen gemeinschaftliche Cathete DE; folglich ergeben sich leicht EA, EB und EC.

§. 116.

Aufgaben zur Selbstübung.

1) (Fig. 35.) Die drey an O zusammenstossenden ebenen Winkel der Pyramide MONP sind gegeben, nämlich $NOM = 84^{\circ} 12'$, $MOP = 72^{\circ} 24'$ und $NOP = 103^{\circ} 27'$, wie groß sind die drey Neigungs-Winkel der drey bey O zusammenstossenden Begrenzungs-Flächen dieser Pyramide?

2) Wie groß ist der Neigungs-Winkel der Seiten-Kante eines Tetraëder's gegen seine Grund-Fläche?

3) Wie groß ist der Neigungs-Winkel der Seiten-Kante einer geraden fünfseitigen Pyramide, gegen die Grund-Fläche, wenn die Seiten-Kante drey Mahl so groß ist, als eine Seite der Grund-Fläche? — Welche Neigungs-Winkel bilden die Seiten-Flächen unter sich und gegen die Grund-Fläche?



Ist die Höhe gefunden, so hat man in den bey E recht-
winkligen Dreiecken BAE, EAB, DCE, die Hypotenusen
BE, ED, EC und die ihnen gemeinschaftliche Cathete DE;
folglich ergeben sich leicht EA, EB und EC.

§ 110.

Aufgaben zur Selbstübung.

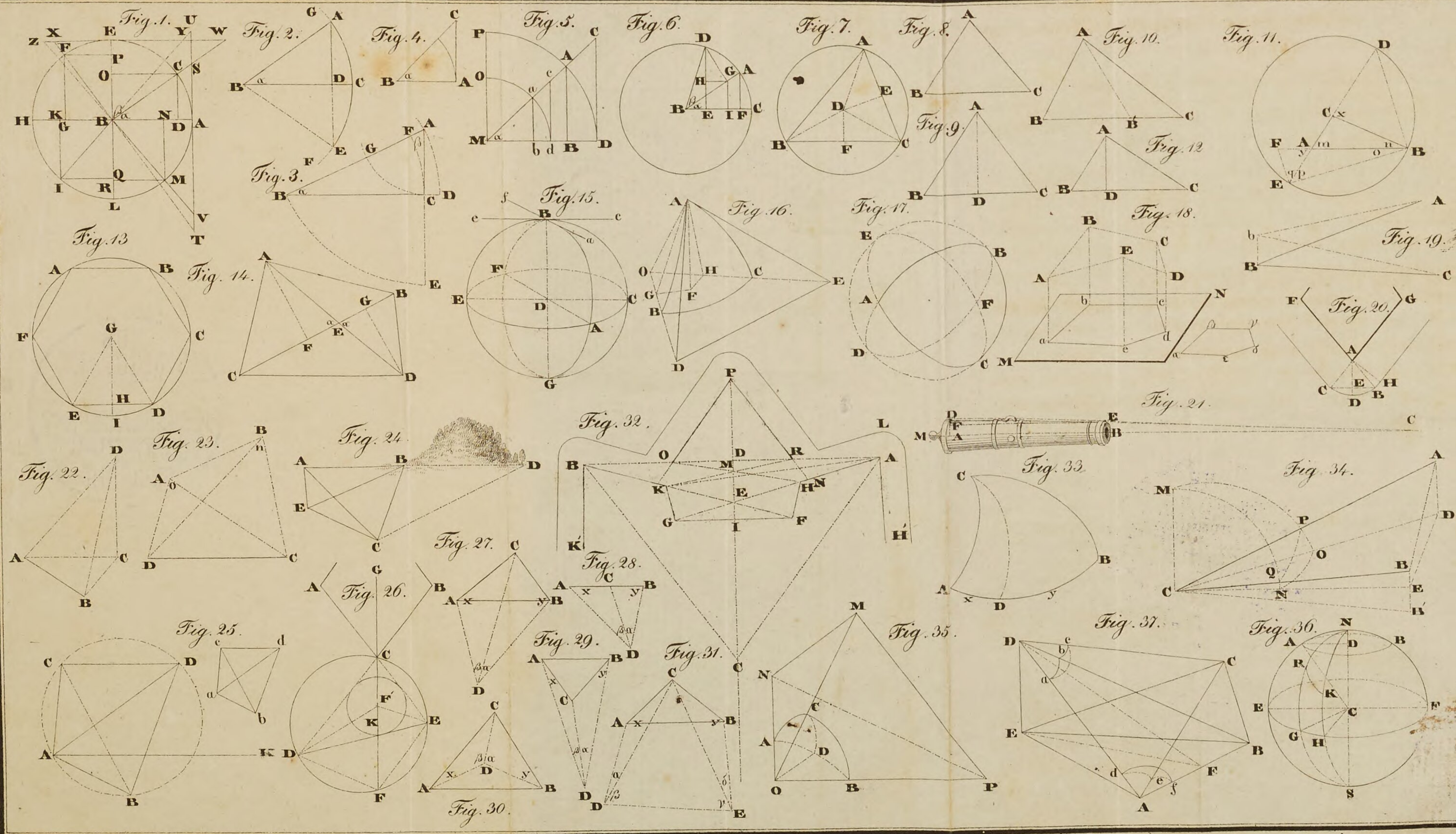
1) (Fig. 35.) Die drey an O zusammenstossenden ebenen
Winkel der Pyramide MONT sind gegeben, nämlich
 $\text{MOM} = 84^\circ 12'$, $\text{MOP} = 72^\circ 24'$ und $\text{NOP} = 102^\circ 27'$.
Wie groß sind die drey Neigungs-Winkel der drey bey O
zusammenstossenden Begrenzungs-Flächen dieser Pyramide?

E r r a t a.

- Seite 54. Zeile 15. statt mDG lies: $\frac{1}{2}$ m. DG.
 „ 63. „ 9. Ist zu Anfang der Zeile „Zusatz“ zu setzen.
 „ 68. „ 32. statt Zus. II. lies: Zus.
 „ 69. „ 9. „ Z. II. lies: Z.
 „ 70. „ 7. „ §. 66. lies: §. 67.
 „ 71. „ 20. „ — 1 und lies: und
 „ 77. „ 20. „ $B+B+C$ lies: $A+B+C$.



(Der Buchbinder wird auf das Blatt S. 84. besonders
aufmerksam gemacht.)





Seym = Set - ~~Seym~~ Mysel

Unruh

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h (r^2 - h) (r - h)$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h (r^2 - r h + h^2)$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{2}{3} r^2 \pi h + r h^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi$$

$$= h^2 \pi (r - \frac{1}{3} h)$$

